

Informatyka 1

Politechnika Białostocka - Wydział Elektryczny
Elektrotechnika, semestr II, studia niestacjonarne I stopnia
Rok akademicki 2018/2019

Wykład nr 4 (29.03.2019)

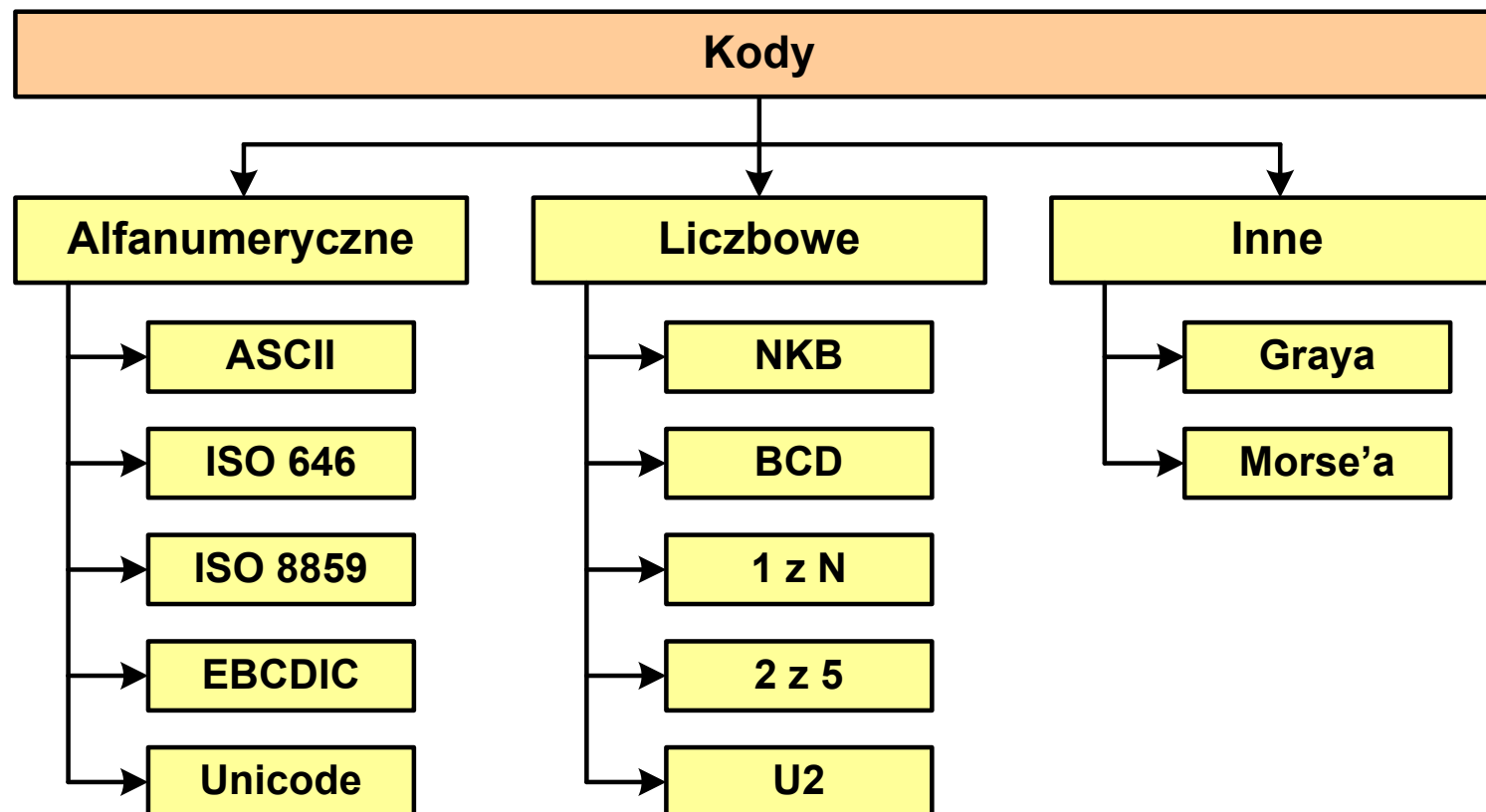
dr inż. Jarosław Forenc

Plan wykładu nr 4

- Kodowanie liczb
 - NKB, BCD, 2 z 5, Graya
- Reprezentacja liczb całkowitych
 - bez znaku, ze znakiem (ZM, U1, U2)
- Reprezentacja zmiennoprzecinkowa
 - zapis zmiennoprzecinkowy liczby rzeczywistej, postać znormalizowana
 - zakres liczb zmiennoprzecinkowych
- Standard IEEE 754
 - liczby 32-bitowe i 64-bitowe, zakres i precyzja liczb
 - wartości specjalne, operacje z wartościami specjalnymi

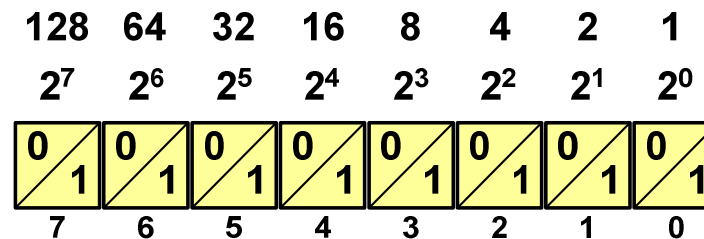
Kodowanie

- **Kodowanie** - proces przekształcania jednego rodzaju postaci informacji na inną postać



Kody liczbowe - Naturalny Kod Binarny (NKB)

- Jeżeli dowolnej liczbie dziesiętnej przypiszemy odpowiadającą jej liczbę binarną, to otrzymamy **naturalny kod binarny** (NKB)



Liczba dziesiętna	Kod NKB
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111

Liczba dziesiętna	Kod NKB
8	1000
9	1001
10	1010
11	1011
12	1100
13	1101
14	1110
15	1111

Kody liczbowe - Kod BCD

- **B**inary-**C**oded **D**ecimal - dziesiętny zakodowany dwójkowo
- **BCD** - sposób zapisu liczb polegający na zakodowaniu kolejnych cyfr liczby dziesiętnej w 4-bitowym systemie dwójkowym (NKB)

Cyfra dziesiętna	BCD	Cyfra dziesiętna	BCD
0	0000	5	0101
1	0001	6	0110
2	0010	7	0111
3	0011	8	1000
4	0100	9	1001

- W ogólnym przypadku kodowane są tylko znaki **0 ÷ 9**
- Pozostałe kombinacje bitowe mogą być stosowane do kodowania znaku liczby lub innych znaczników.

Kody liczbowe - Kod BCD

■ Przykład:

$$168_{(10)} = ?_{(BCD)}$$

$$\begin{array}{ccc} \overbrace{0001}^1 & \overbrace{0110}^6 & \overbrace{1000}^8 \\ 0001 & 0110 & 1000 \end{array}$$

$$168_{(10)} = 000101101000_{(BCD)}$$

$$1001 | 0101 | 0011_{(BCD)} = ?_{(10)}$$

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{1001}_9 & \underbrace{0101}_5 & \underbrace{0011}_3 \\ 1001 & 0101 & 0011 \end{array}$$

$$100101010011_{(BCD)} = 953_{(10)}$$

■ Zastosowania:

- urządzenia elektroniczne z wyświetlaczem cyfrowym (np. kalkulatory, mierniki cyfrowe, kasy sklepowe, wagi)
- przechowywania daty i czasu w BIOSie komputerów (także wczesne modele PlayStation 3)
- zapis części ułamkowych kwot (systemy bankowe).

Kody liczbowe - Kod BCD: przechowywanie liczb

- Użycie 4 najmłodszych bitów jednego bajta, 4 starsze bity są ustawiane na jakąś konkretną wartość:
 - 0000
 - 1111 (np. kod EBCDIC, liczby $F0_{(16)} \div F9_{(16)}$)
 - 0011 (tak jak w ASCII, liczby $30_{(16)} \div 39_{(16)}$)
- Zapis dwóch cyfr w każdym bajcie (starsza na starszej połówce, młodsza na młodszej połówce) - jest to tzw. **spakowane BCD**
 - w przypadku liczby zapisanej na kilku bajtach, najmniej znacząca tetrada (4 bity) używane są jako flaga znaku
 - standardowo przyjmuje się 1100 ($C_{(16)}$) dla znaku plus (+) i 1101 ($D_{(16)}$) dla znaku minus (-), np.

$$127_{(10)} = 0001\ 0010\ 0111\ \mathbf{1100} \quad (127C_{(16)})$$

$$-127_{(10)} = 0001\ 0010\ 0111\ \mathbf{1101} \quad (127D_{(16)})$$

Kody liczbowe - Kod BCD

- Warianty kodu BCD:

Cyfra dziesiętna	BCD 8421	Excess-3	BCD 2421	BCD 84-2-1	IBM 1401 BCD 8421
0	0000	0011	0000	0000	1010
1	0001	0100	0001	0111	0001
2	0010	0101	0010	0110	0010
3	0011	0110	0011	0101	0011
4	0100	0111	0100	0100	0100
5	0101	1000	1011	1011	0101
6	0110	1001	1100	1010	0110
7	0111	1010	1101	1001	0111
8	1000	1011	1110	1000	1000
9	1001	1100	1111	1111	1001

- Podstawowy wariant: **BCD 8421** (**SBCD** - Simple Binary Coded Decimal)

Kody liczbowe - Kod 2 z 5

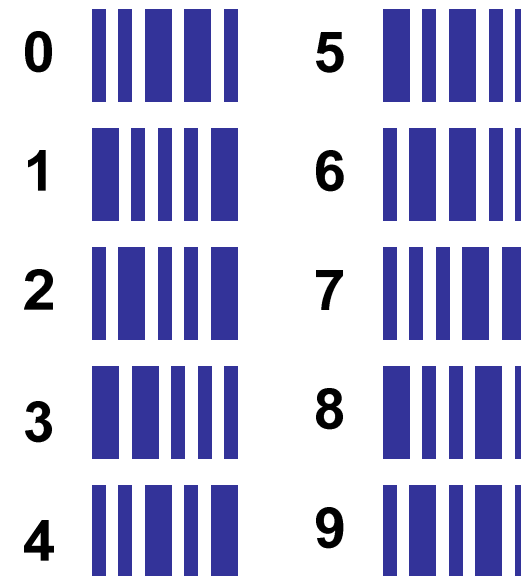
- Kod 5-bitowy: 2 bity zawsze równe 1, a 3 bity zawsze równe 0
- Koduje 10 znaków (cyfry dziesiętne), kody nie są wzajemnie jednoznaczne (ta sama wartość może być zakodowana w różny sposób)

- Kod stałowagowy
- Kod detekcyjny
- Stosowany głównie w kodach kreskowych

Liczba dziesiętna	2 z 5 (01236)	2 z 5 (01234)	2 z 5 (74210)
0	01100	01100	11000
1	11000	11000	00011
2	10100	10100	00101
3	10010	10010	00110
4	01010	01010	01001
5	00110	00110	01010
6	10001	10001	01100
7	01001	01001	10001
8	00101	00101	10010
9	00011	00011	10100

Kody liczbowe - Kod 2 z 5 Industrial (1960 r.)

- Jednowymiarowy kod kreskowy kodujący cyfry: 0 ÷ 9
- Znak to 5 pasków: 2 szerokie i 3 wąskie
- Szeroki pasek jest wielokrotnością wąskiego, szerokości muszą być takie same dla całego kodu
- Struktura kodu:
 - start: 11011010
 - numer
 - stop: 11010110



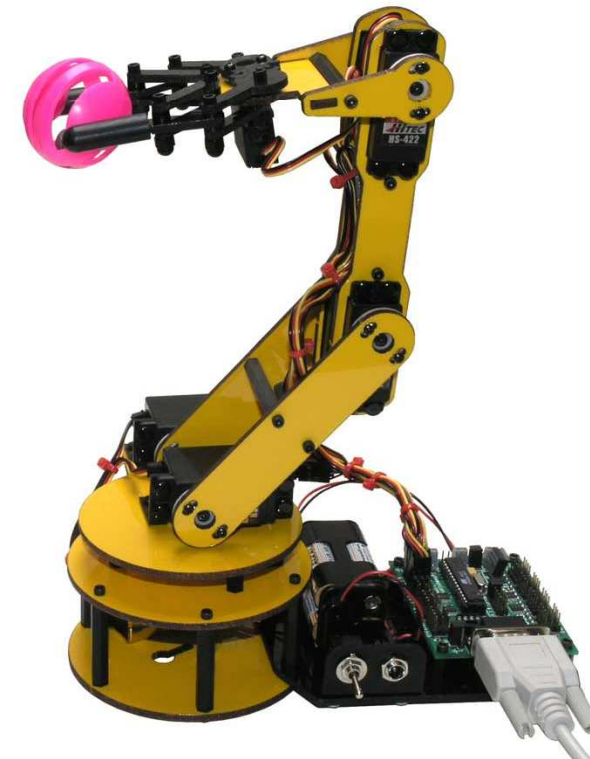
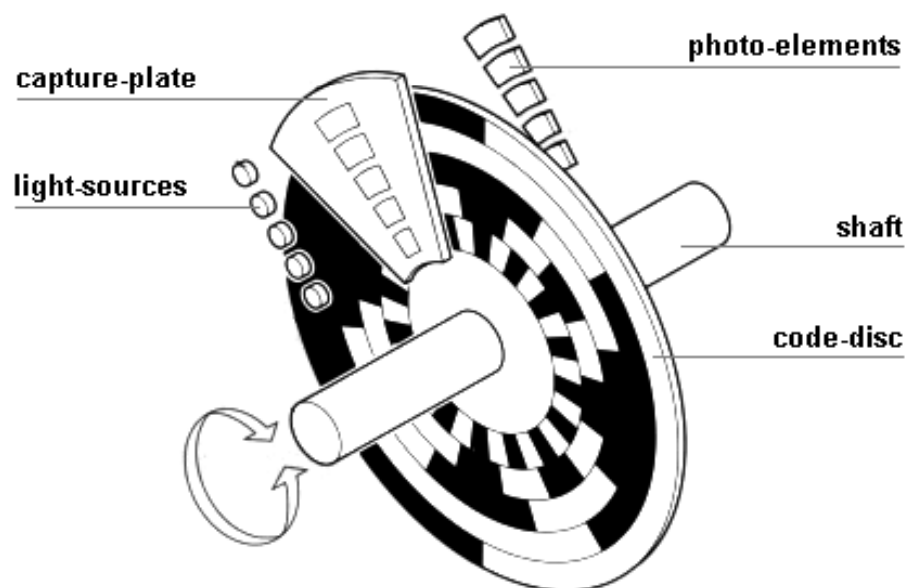
Kod Graya (refleksyjny)

- Kod dwójkowy, bezwagowy, niepozycyjny
- Dwa kolejne słowa kodowe różnią się stanem jednego bitu
- Kod cykliczny - ostatni i pierwszy wyraz również różnią się stanem jednego bitu

<u>kod 1-bitowy</u>	<u>kod 2-bitowy</u>	<u>kod 3-bitowy</u>
0	00	000
1	01	001
	<u>11</u>	011
	10	<u>010</u>
		110
		111
		101
		100

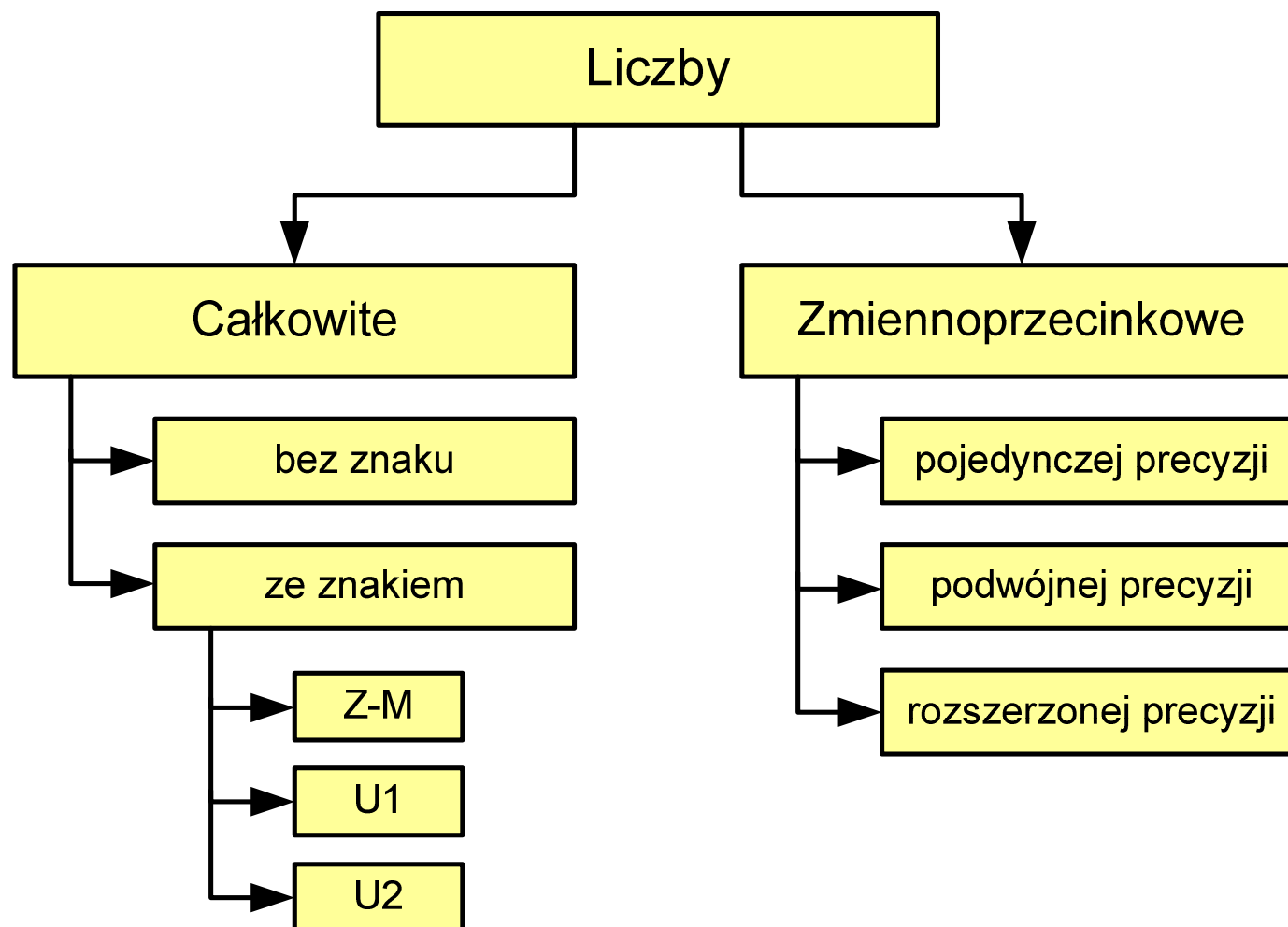
Kod Graya

- Stosowany w przetwornikach analogowo-cyfrowych, do cyfrowego pomiaru analogowych wielkości mechanicznych (np. kąt obrotu)



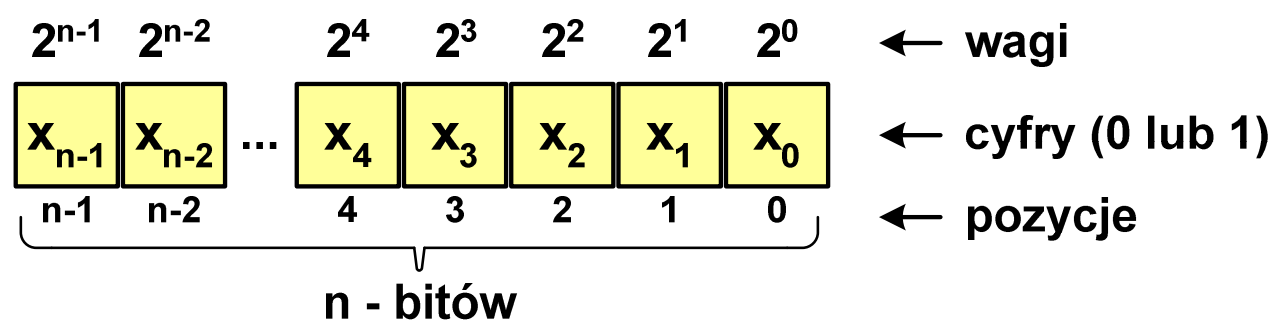
<http://tams-www.informatik.uni-hamburg.de/applets/hades/webdemos/10-gates/15-graycode/dual2gray.html>

Reprezentacja liczb w systemach komputerowych



Liczby całkowite bez znaku

- Zapis liczby w systemie dwójkowym:



- Używając **n-bitów** można zapisać liczbę z zakresu:

$$X_{(2)} = \langle 0, 2^n - 1 \rangle$$

8-bitów 0 ... 255

16-bitów 0 ... 65 535

32-bity 0 ... 4 294 967 295

64-bity 0 ... 18 446 744 073 709 551 615

18 trylionów 446 miliardów 744 biliony 73 miliardy 709 milionów 551 tysięcy 615

Liczby całkowite bez znaku w języku C

- Typy zmiennych całkowitych bez znaku stosowane w języku C:

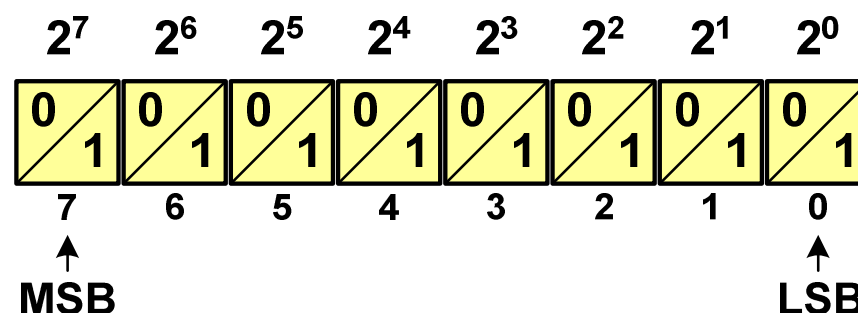
<u>Nazwa typu</u>	<u>Rozmiar (bajty)</u>	<u>Zakres wartości</u>
unsigned char	1 bajt	0 ... 255
unsigned short int	2 bajty	0 ... 65 535
unsigned int	4 bajty	0 ... 4 294 967 295
unsigned long int	4 bajty	0 ... 4 294 967 295
unsigned long long int	8 bajtów	0 ... 18 446 744 073 709 551 615

- W nazwach typów **short** i **long** można pominąć słowo **int**:

unsigned short int	→	unsigned short
unsigned long int	→	unsigned long
unsigned long long int	→	unsigned long long

Liczby całkowite bez znaku w języku C

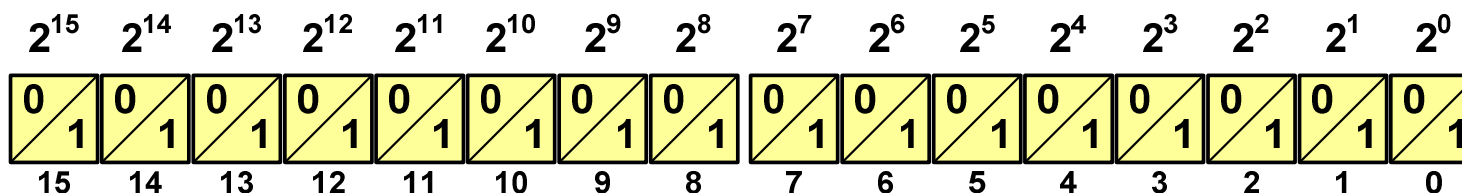
- Typ **unsigned char** (1 bajt):



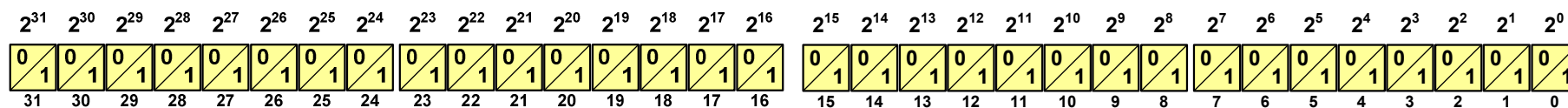
- **MSB** (Most Significant Bit) - najbardziej znaczący bit, najstarszy bit, największa waga
 - **LSB** (Least Significant Bit) - najmniej znaczący bit, najmłodszy bit, najmniejsza waga
- Zakres wartości:
 - dolna granica: $0000\ 0000_{(2)} = 00_{(16)} = 0_{(10)}$
 - górna granica: $1111\ 1111_{(2)} = FF_{(16)} = 255_{(10)}$

Liczby całkowite bez znaku w języku C

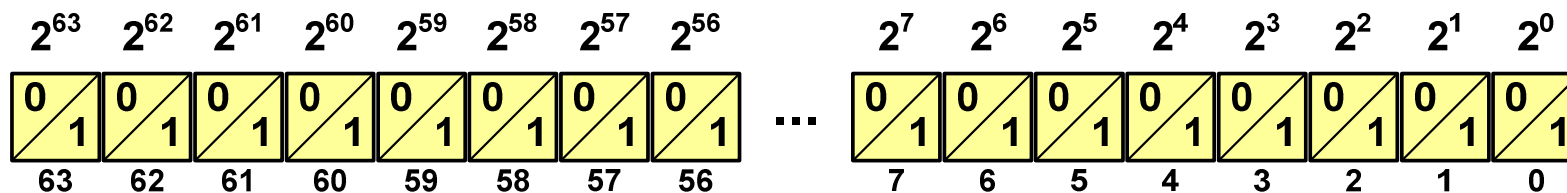
- Typ **unsigned short int** (2 bajty):



- Typy **unsigned int** (4 bajty) i **unsigned long int** (4 bajty):



- Typ **unsigned long long int** (8 bajtów):



Liczby całkowite bez znaku w języku C

```
unsigned short int:      65535 0 1
unsigned int:            4294967295 0 1
unsigned long int:      4294967295 0 1
unsigned long long int: 18446744073709551615 0 1
```

```
#include <stdio.h>

int main() /* przepełnienie zmiennej, ang. integer overflow */
{
    unsigned short int    usi = 65535;
    unsigned int          ui  = 4294967295;
    unsigned long int     uli  = 4294967295;
    unsigned long long int ulli = 18446744073709551615;

    printf("unsigned short int:      %hu %hu %hu\n", usi, usi+1, usi+2);
    printf("unsigned int:            %u %u %u\n", ui, ui+1, ui+2);
    printf("unsigned long int:       %lu %lu %lu\n", uli, uli+1, uli+2);
    printf("unsigned long long int:  %llu %llu %llu\n",
           ulli, ulli+1, ulli+2);

    return 0;
}
```

Liczby całkowite bez znaku w języku C

```
unsigned short int:      1 0 65535
unsigned int:            1 0 4294967295
unsigned long int:      1 0 4294967295
unsigned long long int: 1 0 18446744073709551615
```

```
#include <stdio.h>

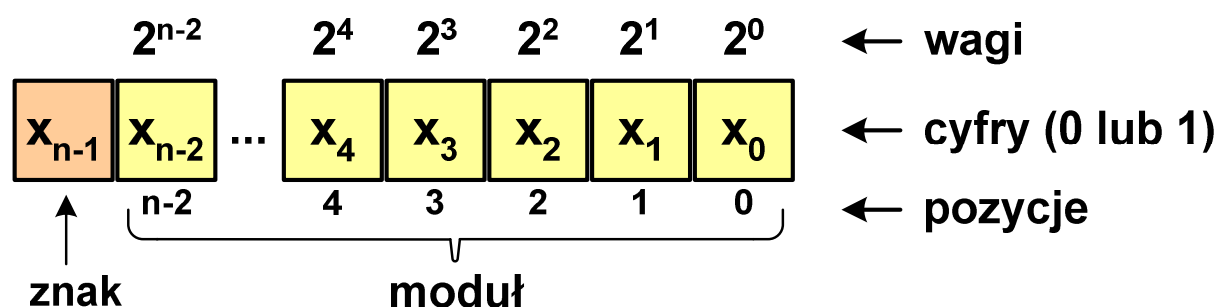
int main() /* przepełnienie zmiennej, ang. integer overflow */
{
    unsigned short int    usi = 1;
    unsigned int          ui = 1;
    unsigned long int     uli = 1;
    unsigned long long int ulli = 1;

    printf("unsigned short int:      %hu %hu %hu\n", usi, usi-1, usi-2);
    printf("unsigned int:            %u %u %u\n", ui, ui-1, ui-2);
    printf("unsigned long int:       %lu %lu %lu\n", uli, uli-1, uli-2);
    printf("unsigned long long int:  %llu %llu %llu\n",
           ulli, ulli-1, ulli-2);

    return 0;
}
```

Liczby całkowite ze znakiem - kod znak-moduł

- Inne nazwy: **ZM**, **Z-M**, **SM (Signed Magnitude)**, **S+M**
- Najstarszy bit jest bitem znaku liczby: 0 - dodatnia, 1 - ujemna
- Pozostałe bity mają takie same znaczenie jak w **NKB**



- Wartość liczby:

$$X_{(10)} = \underbrace{(x_0 \cdot 2^0 + x_1 \cdot 2^1 + x_2 \cdot 2^2 + \dots + x_{n-2} \cdot 2^{n-2})}_{\text{moduł}} \cdot \underbrace{(-1)^{x_{n-1}}}_{\text{znak}} = (-1)^{x_{n-1}} \cdot \sum_{i=0}^{n-2} x_i \cdot 2^i$$

Liczby całkowite ze znakiem - kod znak-moduł

- Liczby **4-bitowe** (1 bit - znak, 3 bity - moduł) w kodzie **Z-M**:

Z-M	dziesiętnie	Z-M	dziesiętnie
0000	+0	1000	-0
0001	1	1001	-1
0010	2	1010	-2
0011	3	1011	-3
0100	4	1100	-4
0101	5	1101	-5
0110	6	1110	-6
0111	7	1111	-7

- dwie reprezentacje zera

+ 0 (0000_{ZM})

- 0 (1000_{ZM})

- Zakres liczb dla **n-bitów**:

$$X_{(10)} = \langle -2^{n-1} + 1, 2^{n-1} - 1 \rangle$$

dla 8 bitów : $\langle -127 \dots 127 \rangle$

dla 16 bitów : $\langle -32767 \dots 32767 \rangle$

Liczby całkowite ze znakiem - kod znak-moduł

- Zamiana liczby dziesiętnej na kod **Z-M**:

- liczba dodatnia

$$93_{(10)} = ?_{(ZM)}$$

- zamieniamy liczbę na NKB

$$93_{(10)} = 1011101_{(NKB)}$$

- dodajemy bit znaku

$$93_{(10)} = \mathbf{0}1011101_{(ZM)}$$

- liczba ujemna

$$-93_{(10)} = ?_{(ZM)}$$

- zamieniamy **moduł** liczby na NKB

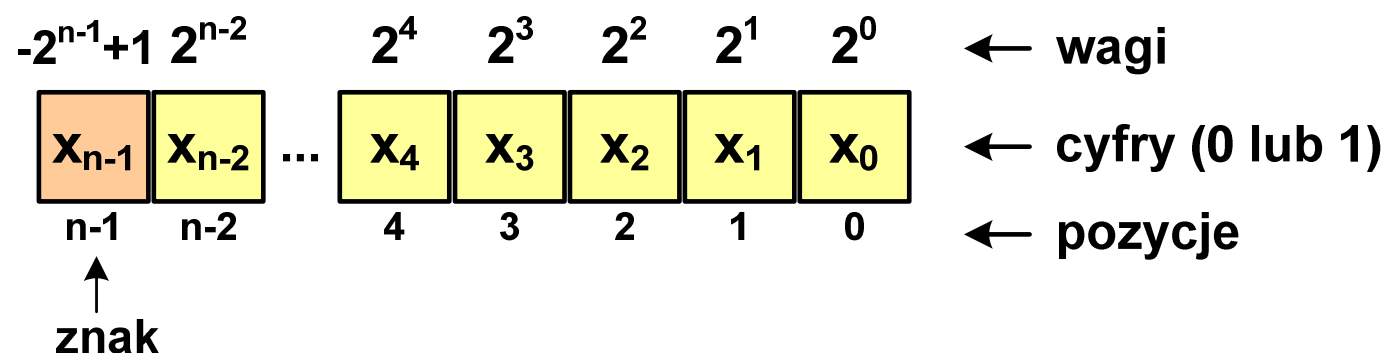
$$|-93_{(10)}| = 93_{(10)} = 1011101_{(NKB)}$$

- dodajemy bit znaku

$$-93_{(10)} = \mathbf{1}1011101_{(ZM)}$$

Liczby całkowite ze znakiem - kod U1

- Inne nazwy: **U1, ZU1, uzupełnień do jedności**
- Najstarszy bit jest bitem znaku liczby: 0 - dodatnia, 1 - ujemna
- Wszystkie bity liczby posiadają takie same wagi jak w NKB, oprócz pierwszego bitu, który ma wagę $-2^{n-1} + 1$



- Wartość liczby:

$$X_{(10)} = x_0 \cdot 2^0 + x_1 \cdot 2^1 + x_2 \cdot 2^2 + \dots + x_{n-2} \cdot 2^{n-2} + x_{n-1} \cdot (-2^{n-1} + 1)$$

Liczby całkowite ze znakiem - kod U1

- Liczby **4-bitowe** (1 bit - znak, 3 bity - moduł) w kodzie **U1**:

U1	dziesiętnie	U1	dziesiętnie
0000	+0	1111	-0
0001	1	1110	-1
0010	2	1101	-2
0011	3	1100	-3
0100	4	1011	-4
0101	5	1010	-5
0110	6	1001	-6
0111	7	1000	-7

- liczby dodatnie zapisywane są tak samo jak w NKB
- liczby ujemne otrzymywane są poprzez bitową negację
- dwie reprezentacje zera

- Zakres liczb dla **n-bitów**:

$$X_{(10)} = \langle -2^{n-1} + 1, 2^{n-1} - 1 \rangle$$

dla 8 bitów : $\langle -127 \dots 127 \rangle$

dla 16 bitów : $\langle -32767 \dots 32767 \rangle$

Liczby całkowite ze znakiem - kod U1

- Zamiana liczby dziesiętnej na kod **U1**:

- liczba dodatnia

$$93_{(10)} = ?_{(U1)}$$

- zamieniamy liczbę na NKB

$$93_{(10)} = 1011101_{(NKB)}$$

- dodajemy bit znaku: 0

$$93_{(10)} = \mathbf{0}1011101_{(U1)}$$

- liczba ujemna

$$-93_{(10)} = ?_{(U1)}$$

- zamieniamy **moduł** liczby na U1

$$|-93_{(10)}| = 93_{(10)} = 01011101_{(U1)}$$

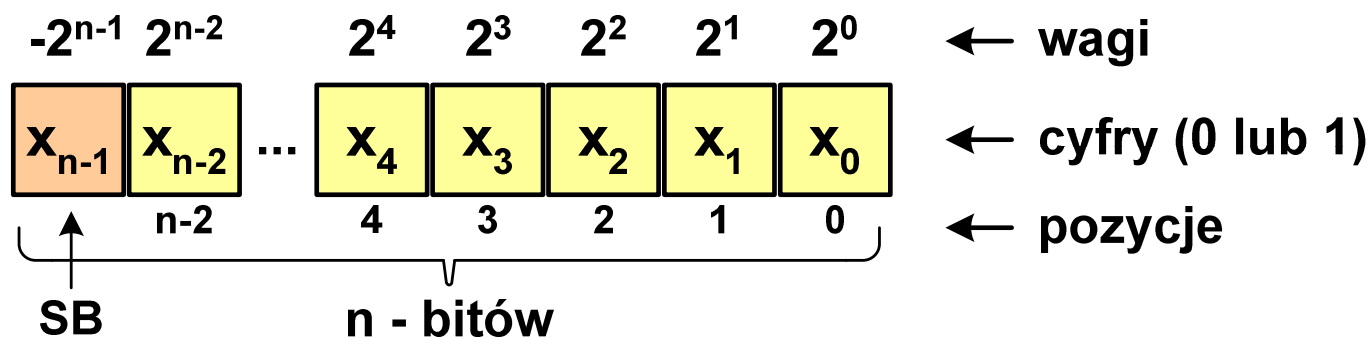
- negujemy wszystkie bity

$$-93_{(10)} = 10100010_{(U1)}$$

↖ bit znaku

Liczby całkowite ze znakiem - kod U2

- Inne nazwy: **ZU2**, **uzupełnień do dwóch**, **two's complement**
- Najstarszy bit jest bitem znaku liczby: 0 - dodatnia, 1 - ujemna



- Wartość liczby:

$$X_{(10)} = x_0 \cdot 2^0 + x_1 \cdot 2^1 + x_2 \cdot 2^2 + \dots + x_{n-2} \cdot 2^{n-2} + x_{n-1} \cdot (-2^{n-1})$$

- Kod **U2** jest obecnie powszechnie stosowany w informatyce

Liczby całkowite ze znakiem - kod U2

- Liczby **4-bitowe** (1 bit - znak, 3 bity - moduł) w kodzie **U2**:

U2	dziesiętnie	U2	dziesiętnie
0000	0	1111	-1
0001	1	1110	-2
0010	2	1101	-3
0011	3	1100	-4
0100	4	1011	-5
0101	5	1010	-6
0110	6	1001	-7
0111	7	1000	-8

- brak podwójnej reprezentacji zera
- liczb ujemnych jest o jeden więcej niż dodatnich
- **00...000** zawsze oznacza $0_{(10)}$
11...111 zawsze oznacza $-1_{(10)}$

- Zakres liczb dla **n-bitów**:

$$X_{(10)} = \langle -2^{n-1}, 2^{n-1} - 1 \rangle$$

dla 8 bitów : $\langle -128 \dots 127 \rangle$

dla 16 bitów : $\langle -32768 \dots 32767 \rangle$

Liczby całkowite ze znakiem - kod U2

■ Zamiana liczby dziesiętnej na kod U2:

- liczba dodatnia

$$75_{(10)} = ?_{(U2)}$$

- zamieniamy liczbę na NKB

$$75_{(10)} = 1001011_{(NKB)}$$

- dodajemy bit znaku: 0

$$75_{(10)} = \mathbf{0}1001011_{(U2)}$$

- liczba ujemna

$$-75_{(10)} = ?_{(U2)}$$

- zamieniamy **moduł** liczby na U2

$$|-75_{(10)}| = 75_{(10)} = 01001011_{(U2)}$$

- negujemy wszystkie bity i dodajemy 1

$$\begin{array}{r} 01001011 \\ \text{negacja: } 10110100 \\ +1: \qquad \qquad 1 \\ \hline -75_{(10)} = 10110101_{(U2)} \end{array}$$

Liczby całkowite ze znakiem - kod U2 w języku C

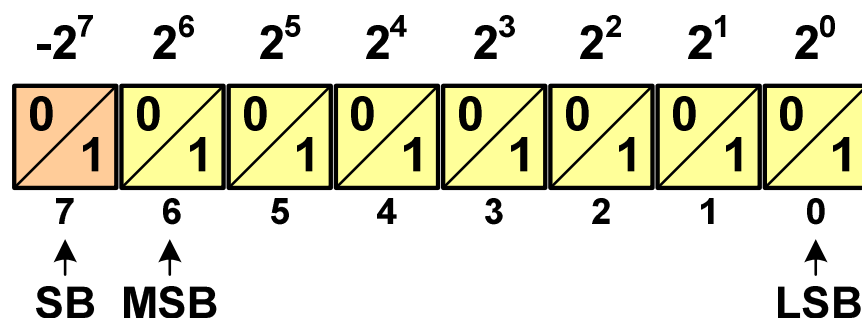
- Typy zmiennych całkowitych ze znakiem stosowane w języku C:

<u>Nazwa typu</u>	<u>Rozmiar (bajty)</u>	<u>Zakres wartości</u>
char	1 bajt	-128 ... 127
short int	2 bajty	-32 768 ... 32 767
int	4 bajty	-2 147 483 648 ... 2 147 483 647
long int	4 bajty	-2 147 483 648 ... 2 147 483 647
long long int	8 bajtów	-9 223 372 036 854 775 808 ... 9 223 372 036 854 775 807

- Przed nazwą każdego z powyższych typów można dodać **signed**
signed char, **signed short int**, **signed int** ...
- W nazwach typów **short** i **long** można pominąć słowo **int**:
short int → **short**, **long int** → **long**, **long long int** → **long long**

Liczby całkowite ze znakiem - kod U2 w języku C

- Typ `char` / `signed char` (1 bajt):

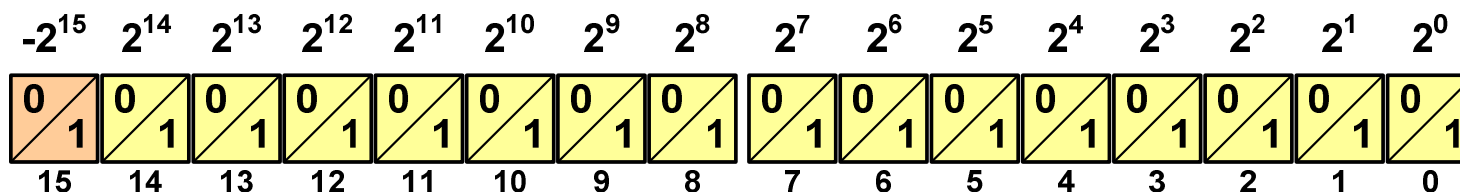


- Zakres wartości:

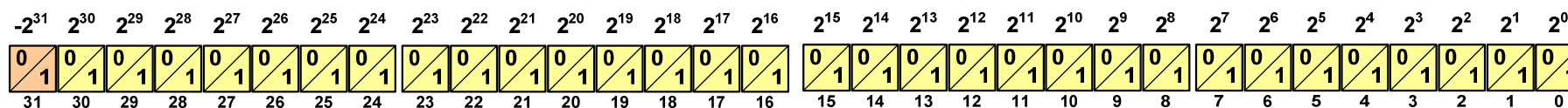
- dolna granica: $1000\ 0000_{(2)} = -128_{(10)}$
- górna granica: $0111\ 1111_{(2)} = 127_{(10)}$
- inne wartości: $1111\ 1111_{(2)} = -1_{(10)}$
 $0000\ 0000_{(2)} = 0_{(10)}$

Liczby całkowite bez znaku w języku C

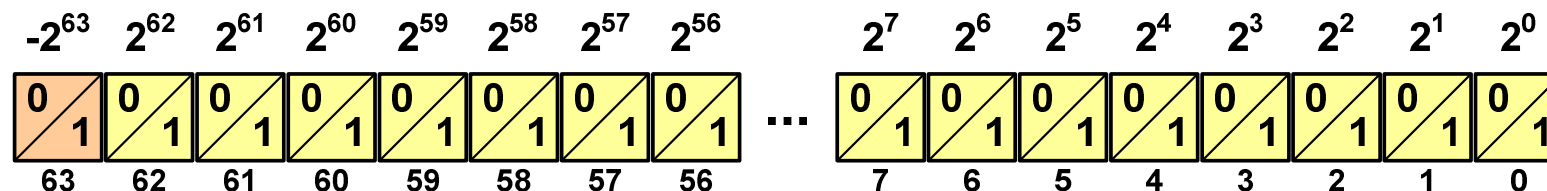
- Typ **short / signed short int** (2 bajty):



- Typy **int / signed int** (4 bajty) i **long / signed long int** (4 bajty):



- Typ **long long int / signed long long int** (8 bajtów):



Liczby całkowite ze znakiem - kod U2 w języku C

```
short int:      32767 -32768 -32767
int:           2147483647 -2147483648 -2147483647
long int:      2147483647 -2147483648 -2147483647
long long int: 9223372036854775807 -9223372036854775808
```

```
#include <stdio.h>

int main() /* przepełnienie zmiennej, ang. integer overflow */
{
    short int    si = 32767;
    int          i  = 2147483647;
    long int     li = 2147483647;
    long long int lli = 9223372036854775807;

    printf("short int:      %hd %hd %hd\n", si, si+1, si+2);
    printf("int:           %d %d %d\n", i, i+1, i+2);
    printf("long int:      %ld %ld %ld\n", li, li+1, li+2);
    printf("long long int: %lld %lld\n", lli, lli+1);

    return 0;
}
```


Zapis zmiennoprzecinkowy liczby rzeczywistej

- Zapis bardzo dużych lub małych liczb wymaga dużej liczby cyfr
- Znacznie prostsze jest przedstawienie liczb w postaci **zmiennoprzecinkowej** (ang. **floating point numbers**)
 - 12 000 000 000 000 = $1,2 \cdot 10^{13}$
 - 0,000 000 000 001 = $1,0 \cdot 10^{-12}$
- Zapis liczby zmiennoprzecinkowej ma postać:

$$L = M \cdot B^E$$

gdzie:

L - wartość liczby

B - podstawa systemu

M - mantysa

E - wykładnik, cecha

- notacja naukowa: 1,2e13 1,2e+13 1,2E13 1,2E+13
- postać wykładnicza: $1,2 \cdot 10^{13}$

Zapis zmiennoprzecinkowy liczby rzeczywistej

$$2,43 \cdot 10^3_{(10)} = 2,43 \cdot 1000 = 2430_{(10)}$$

$$6,59 \cdot 10^{-2}_{(10)} = 6,59 \cdot 0,01 = 0,0659_{(10)}$$

$$1,011 \cdot 10^{101}_{(2)} = ?_{(10)}$$

$$M = 1,011_{(2)} = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} = 1,375_{(10)}$$

$$B = 10_{(2)} = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 = 2_{(10)}$$

$$E = 101_{(2)} = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 = 1 + 4 = 5_{(10)}$$

$$1,011 \cdot 10^{101}_{(2)} = 1,375 \cdot 2^5 = 1,375 \cdot 32 = 44_{(10)}$$

$$3,121 \cdot 10^{32}_{(4)} = ?_{(10)}$$

$$M = 3,121_{(4)} = 3 \cdot 4^0 + 1 \cdot 4^{-1} + 2 \cdot 4^{-2} + 1 \cdot 4^{-3} = 3,390625_{(10)}$$

$$B = 10_{(4)} = 0 \cdot 4^0 + 1 \cdot 4^1 = 4_{(10)}$$

$$E = 32_{(4)} = 2 \cdot 4^0 + 3 \cdot 4^1 = 2 + 12 = 14_{(10)}$$

$$3,121 \cdot 10^{32}_{(4)} = 3,390625 \cdot 4^{14} = 910\,163\,968_{(10)}$$

Postać znormalizowana zapisu liczby

- Położenie przecinka w mantysie nie jest ustalone i może się zmieniać
- Poniższe zapisy oznaczają tę samą liczbę (system dziesiętny)

$$243 \cdot 10^1 = 24,3 \cdot 10^2 = 2,43 \cdot 10^3 = 0,243 \cdot 10^4$$

- Dla ujednoczenia zapisu i usunięcia wielokrotnych reprezentacji tej samej liczby, przyjęto tzw. **postać znormalizowaną** zapisu liczby
- W postaci znormalizowanej mantysa spełnia nierówność:

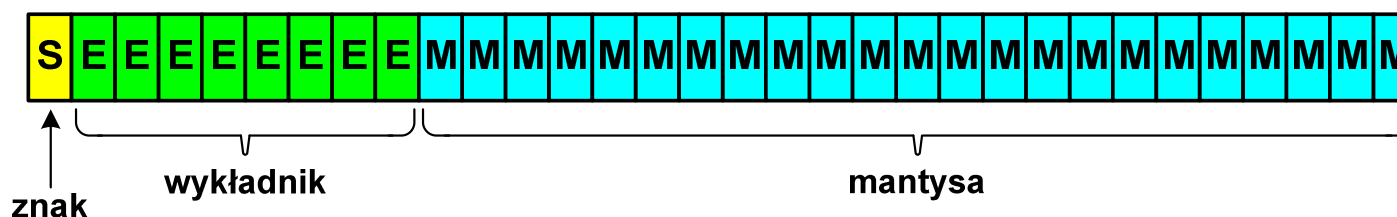
$$B > |M| \geq 1$$

Przykład:

- $2,43 \cdot 10^3$ - to jest postać znormalizowana, gdyż: $10 > |2,43| \geq 1$
- $0,243 \cdot 10^4$ - to nie jest postać znormalizowana
- $24,3 \cdot 10^2$ - to nie jest postać znormalizowana

Liczby zmiennoprzecinkowe w systemie binarnym

- Liczba bitów przeznaczonych na mantysę i wykładnik jest ograniczona



- Wartość liczby L :

$$L = (-1)^S \cdot M \cdot B^E$$

gdzie:

- S - znak liczby (ang. sign), przyjmuje wartość 0 lub 1
- M - znormalizowana mantysa (ang. mantissa), liczba ułamkowa
- B - podstawa systemu liczbowego (ang. base)
- E - wykładnik (ang. exponent), cecha, liczba całkowita

- W systemie binarnym podstawa systemu jest stała: $B = 2$

$$L = (-1)^S \cdot M \cdot 2^E$$

Przesunięcie wykładnika

- Wykładnik zapisywany jest z przesunięciem (ang. **bias**)

$$L = (-1)^S \cdot M \cdot 2^{E-\text{BIAS}}$$

gdzie:

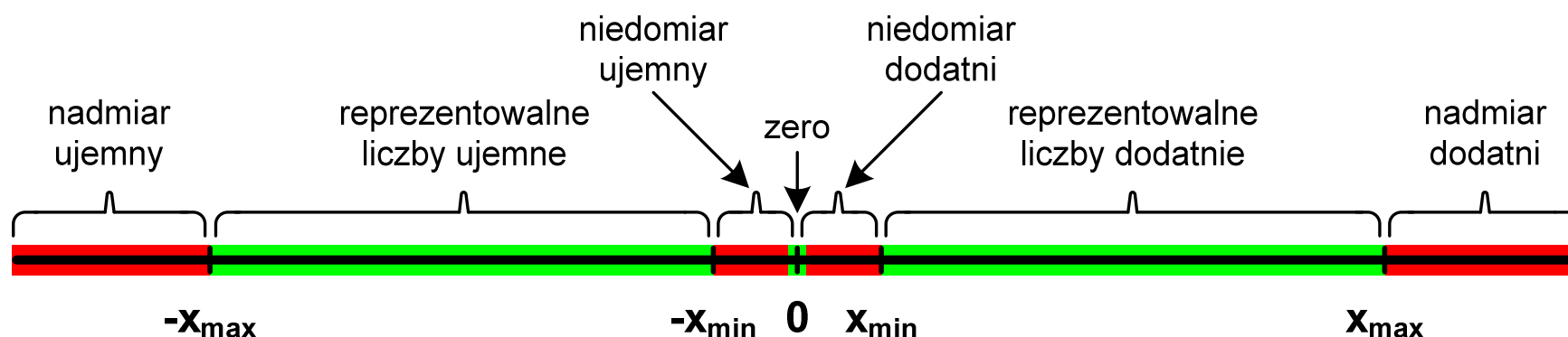
L - wartość liczby **S** - znak liczby **M** - mantysa
E - wykładnik **BIAS** - przesunięcie (nadmiar)

- Typowe wartości przesunięcia (nadmiaru) wynoszą:
 - formatu 32-bitowy: $2^7-1 = 127_{(10)} = 7F_{(16)}$
 - formatu 64-bitowy: $2^{10}-1 = 1023_{(10)} = 3FF_{(16)}$
 - formatu 80-bitowy: $2^{14}-1 = 16383_{(10)} = 3FFF_{(16)}$

Zakres liczb zmiennoprzecinkowych

- Zakres liczb w zapisie zmiennoprzecinkowym:

$$\langle -X_{\max}, -X_{\min} \rangle \cup \{0\} \cup \langle X_{\min}, X_{\max} \rangle$$



- Największa i najmniejsza wartość liczby w danej reprezentacji:

$$X_{\min} = M_{\min} \cdot B^{E_{\min}}$$

$$X_{\max} = M_{\max} \cdot B^{E_{\max}}$$

Standard IEEE 754

- **IEEE Std. 754-2008** - IEEE Standard for Floating-Point Arithmetic
- Standard definiuje następujące klasy liczb zmiennoprzecinkowych:

Precyzja	Długość słowa [bity]	Znak [bity]	Wykładnik		Mantysa	
			Długość [bity]	Zakres	Długość [bity]	Cyfry znaczące
Pojedyncza (Single Precision, binary32)	32	1	8	$2^{\pm 127} \approx 10^{\pm 38}$	23	7
Pojedyncza rozszerzona (Single Extended)	≥ 43	1	≥ 11	$\geq 2^{\pm 1023} \approx 10^{\pm 308}$	≥ 31	≥ 10
Podwójna (Double Precision, binary64)	64	1	11	$2^{\pm 1023} \approx 10^{\pm 308}$	52	16
Podwójna rozszerzona (Double Extended)	≥ 79	1	≥ 15	$\geq 2^{\pm 16383} \approx 10^{\pm 4932}$	≥ 63	≥ 19

źródło: Gryś S.: „Arytmetyka komputerów w praktyce”. PWN, Warszawa, 2007 (str. 116).

Standard IEEE 754

- W przypadku liczb:

- pojedynczej rozszerzonej precyzji (ang. Single Precision)
- podwójnej rozszerzonej precyzji (ang. Double Precision)

standard podaje jedynie minimalną liczbę bitów pozostawiając szczegóły implementacji producentom procesorów i kompilatorów

- Bardzo popularny jest 80-bitowy format **podwójnej rozszerzonej precyzji** (Extended Precision) wprowadzony przez firmę Intel

- W 80-bitowym formacie Intela:

- długość słowa: 80 bitów
- znak: 1 bit
- wykładnik: 15 bitów (zakres: $2^{\pm 16383} \approx 10^{\pm 4932}$)
- mantysa: 63 bity (cyfry znaczące: 19)

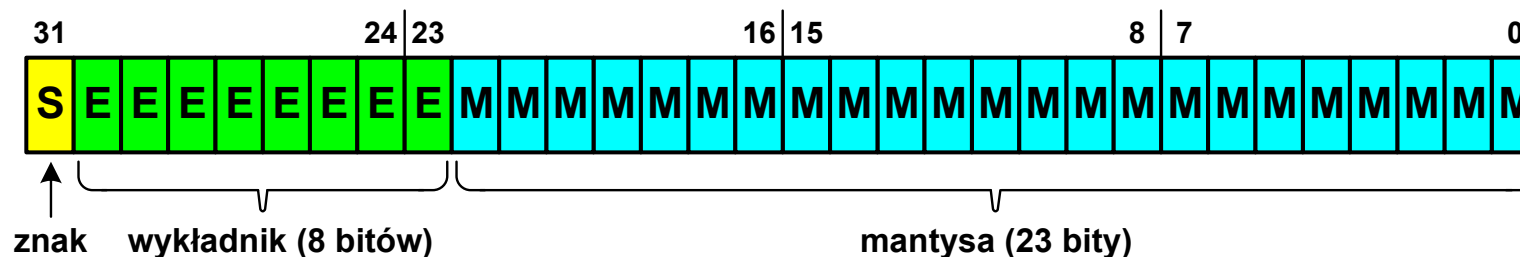
Standard IEEE 754

- Standard IEEE 754 definiuje także dziesiętne typy zmiennoprzecinkowe (operujące na cyfrach dziesiętnych):
 - **decimal32** (32 bity, 7 cyfr dziesiętnych)
 - **decimal64** (64 bity, 16 cyfr dziesiętnych)
 - **decimal128** (128 bitów, 34 cyfry dziesiętnych)

- Standard IEEE 754 definiuje także:
 - sposób reprezentacji specjalnych wartości, np. nieskończoności, zera
 - sposób wykonywania działań na liczbach zmiennoprzecinkowych
 - sposób zaokrąglania liczb

Standard IEEE 754 - liczby 32-bitowe

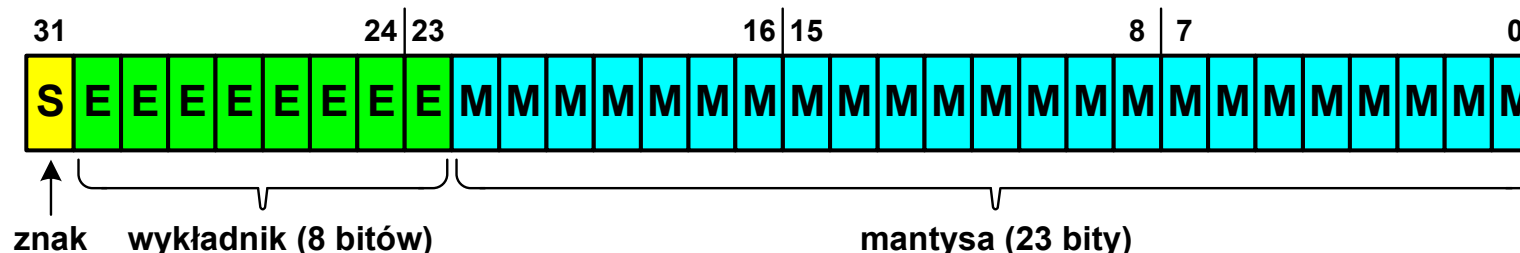
- Liczba pojedynczej precyzji przechowywana jest na 32 bitach:



- Pierwszy bit w zapisie (bit nr 31) jest **bitem znaku** (0 - liczba dodatnia, 1 - liczba ujemna)
- **Wykładnik** zapisywany jest na **8 bitach** (bity nr 30-23) z nadmiarem o wartości 127
- **Wykładnik** może przyjmować wartości od -127 (wszystkie bity wyzerowane) do 128 (wszystkie bity ustawione na 1)

Standard IEEE 754 - liczby 32-bitowe

- Liczba pojedynczej precyzji przechowywana jest na 32 bitach:



- **Mantysa** w większości przypadków jest znormalizowana
- Wartość mantysy zawiera się pomiędzy **1** a **2**, a zatem w zapisie liczby pierwszy bit jest zawsze równy 1
- Powyższy bit nie jest zapamiętywany, natomiast jest automatycznie uwzględniany podczas wykonywania obliczeń
- Dzięki pominięciu tego bitu zyskujemy dodatkowy bit mantysy (zamiast 23 bitów mamy 24 bity)

Standard IEEE 754 - liczby 32-bitowe

■ Przykład:

- obliczmy wartość dziesiętną liczby zmiennoprzecinkowej

$$01000010110010000000000000000000_{(IEEE754)} = ?_{(10)}$$

- dzielimy liczbę na części

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{0}_{S\text{-bit znaku}} & \underbrace{10000101}_{E\text{-wykładnik}} & \underbrace{100100000000000000000000}_{M\text{-mantysa (tylko czesc ulamkowa)}} \end{array}$$

- określamy **znak liczby**

$$S = 0 \quad \text{– liczba dodatnia}$$

- obliczamy **wykładnik** (nadmiar: 127)

$$10000101_{(2)} = 128 + 4 + 1 = 133 \quad \Rightarrow \quad E = 133 - \underbrace{127}_{\text{nadmiar}} = 6_{(10)}$$

Standard IEEE 754 - liczby 32-bitowe

■ Przykład (cd.):

- wyznaczamy **mantysę** dopisując na początku **1**, (część całkowita)

$$\begin{aligned} M &= 1,100100000000000000000000 \\ &= 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-4} = 1 + 0,5 + 0,0625 = 1,5625_{(10)} \end{aligned}$$

- wzór na wartość dziesiętną liczby zmiennoprzecinkowej:

$$L = (-1)^S \cdot M \cdot 2^E$$

- podstawiając otrzymujemy:

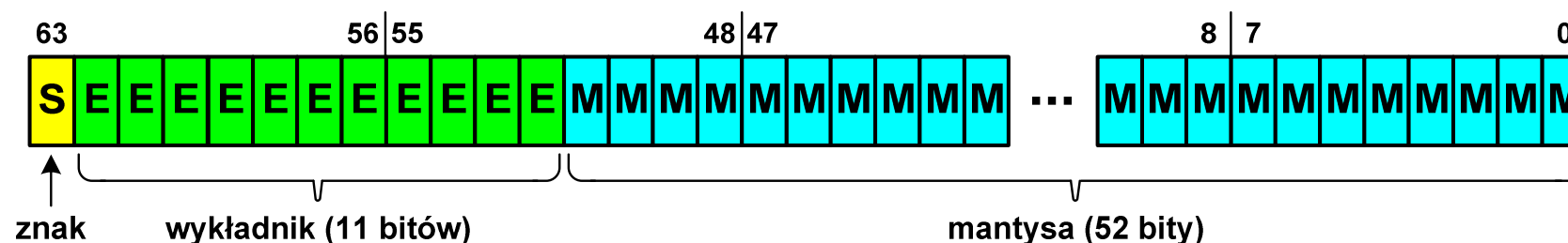
$$S = 0, \quad E = 6_{(10)}, \quad M = 1,5625_{(10)}$$

$$L = (-1)^0 \cdot 1,5625 \cdot 2^6 = 100_{(10)}$$

$$01000010110010000000000000000000_{(IEEE754)} = 100_{(10)}$$

Standard IEEE 754 - liczby 64-bitowe

- Liczba podwójnej precyzji przechowywana jest na 64 bitach:



- Pierwszy bit w zapisie (bit nr 63) jest **bitem znaku** (0 - liczba dodatnia, 1 - liczba ujemna)
- **Wykładnik** zapisywany jest na **11 bitach** (bity nr 62-52) z nadmiarem o wartości 1023
- **Wykładnik** może przyjmować wartości od -1023 (wszystkie bity wyzerowane) do 1024 (wszystkie bity ustawione na 1)
- **Mantysa** zapisywana jest na 52 bitach (pierwszy bit mantysy, zawsze równy 1, nie jest zapamiętywany)

Standard IEEE 754 - zakres liczb

■ Pojedyncza precyzja:

- największa wartość: $\approx 3,4 \cdot 10^{38}$
- najmniejsza wartość: $\approx 1,4 \cdot 10^{-45}$
- zakres liczb: $\langle -3,4 \cdot 10^{38} \dots -1,4 \cdot 10^{-45} \rangle \cup \{0\} \cup \langle 1,4 \cdot 10^{-45} \dots 3,4 \cdot 10^{38} \rangle$

■ Podwójna precyzja:

- największa wartość: $\approx 1,8 \cdot 10^{308}$
- najmniejsza wartość: $\approx 4,9 \cdot 10^{-324}$
- zakres liczb: $\langle -1,8 \cdot 10^{308} \dots -4,9 \cdot 10^{-324} \rangle \cup \{0\} \cup \langle 4,9 \cdot 10^{-324} \dots 1,8 \cdot 10^{308} \rangle$

■ Podwójna rozszerzona precyzja:

- największa wartość: $\approx 1,2 \cdot 10^{4932}$
- najmniejsza wartość: $\approx 3,6 \cdot 10^{-4951}$
- zakres liczb: $\langle -1,2 \cdot 10^{4932} \dots -3,6 \cdot 10^{-4951} \rangle \cup \{0\} \cup \langle 3,6 \cdot 10^{-4951} \dots 1,2 \cdot 10^{4932} \rangle$

Standard IEEE 754 - precyzja liczb

- **Precyzja** - liczba zapamiętywanych cyfr znaczących w systemie (10)

4,86452137846 → 4,864521 - 7 cyfr znaczących

- Precyzja liczby zależy od **liczby bitów mantysy**
- Liczba bitów potrzebnych do zakodowania **1** cyfry dziesiętnej:

$$10^1 = 2^n \rightarrow n = \log_2(10) \approx 3,321928$$

- Liczba cyfr dziesiętnych (**d**) możliwa do zakodowania na **m** bitach:

$\log_2(10)$ bitów - **1** cyfra dziesiętna
m bitów - **d** cyfr dziesiętnych

$$d = \frac{m}{\log_2(10)}$$

Standard IEEE 754 - precyzja liczb

- Dla formatu pojedynczej precyzji:

- mantysa: $23 + 1 = 24$ bity
 - cyfry znaczące: 7
- $$d = \frac{24}{\log_2(10)} = \frac{24}{3,321928} = 7,2247 \approx 7$$

- Dla formatu podwójnej precyzji:

- mantysa: $52 + 1 = 53$ bity
 - cyfry znaczące: 16
- $$d = \frac{53}{\log_2(10)} = \frac{53}{3,321928} = 15,9546 \approx 16$$

- Dla formatu podwójnej rozszerzonej precyzji:

- mantysa: $63 + 1 = 64$ bity
 - cyfry znaczące: 19
- $$d = \frac{64}{\log_2(10)} = \frac{64}{3,321928} = 19,2659 \approx 19$$

Standard IEEE 754 - precyzja liczb

```
#include <stdio.h>
```

```
int main()
```

```
{
```

```
    float x;
```

```
    double y;
```

```
    x = 1234567890.0; /* 1.234.567.890 */
```

```
    y = 1234567890.0; /* 1.234.567.890 */
```

```
    printf("float  -> %f\n", x);
```

```
    printf("double -> %f\n\n", y);
```

```
    y = 12345678901234567890.0;
```

```
    printf("double -> %f\n", y);
```

```
    return 0;
```

```
}
```

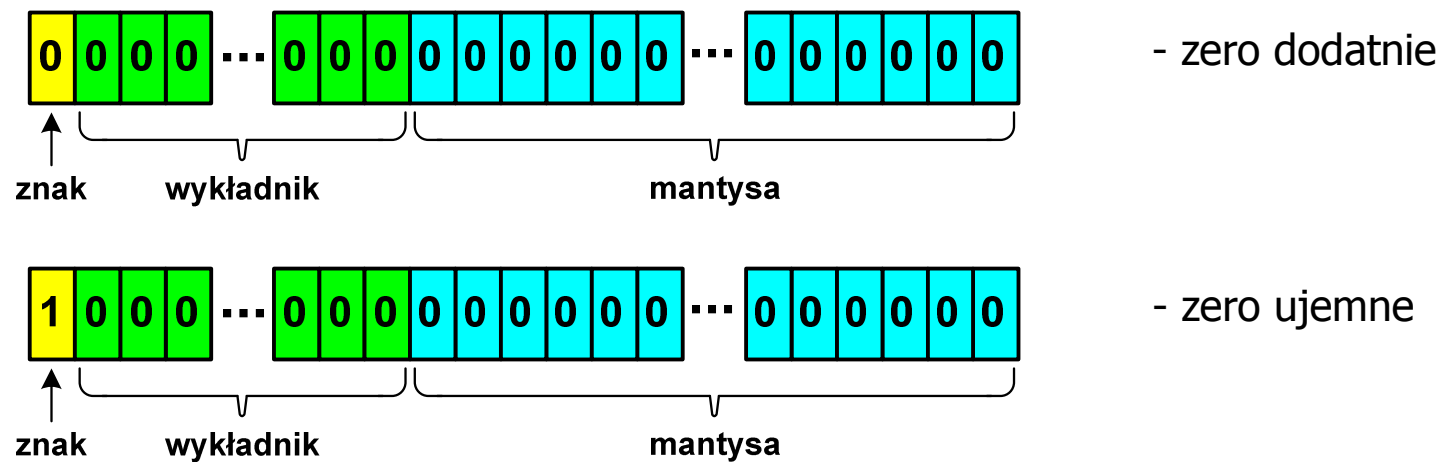
```
float  -> 1234567936.000000
```

```
double -> 1234567890.000000
```

```
double -> 12345678901234567000.000000
```

Standard IEEE 754 - wartości specjalne

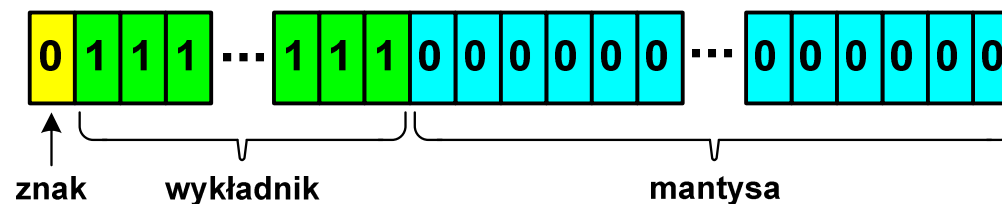
■ Zero:



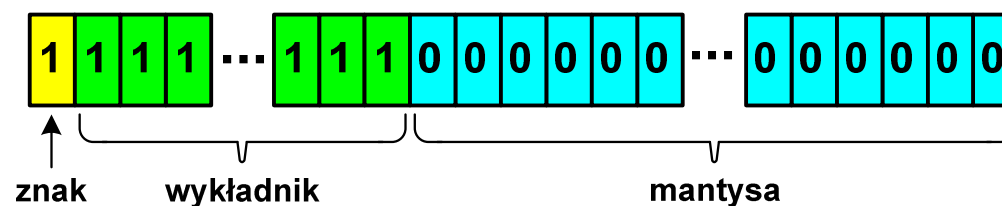
- Podczas porównań zero dodatnie i ujemne są traktowane jako równe sobie

Standard IEEE 754 - wartości specjalne

■ Nieskończoność:



- nieskończoność dodatnia

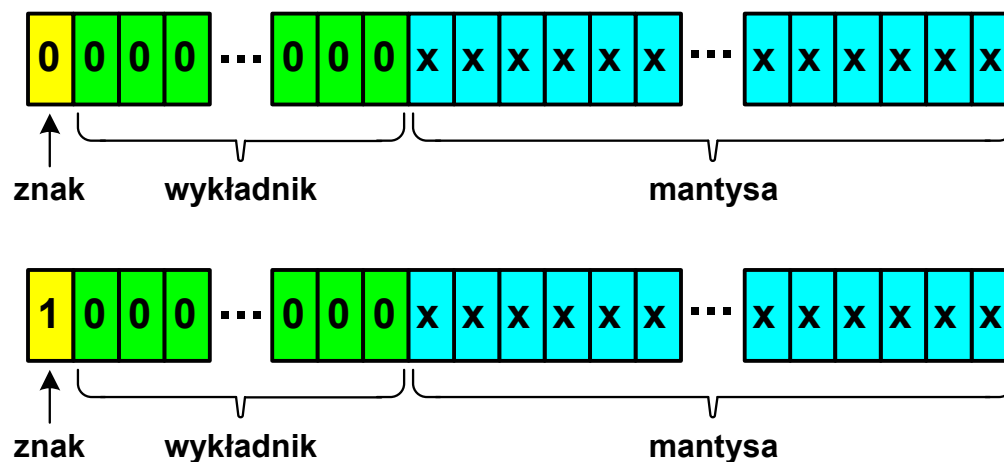


- nieskończoność ujemna

- Nieskończoność występuje w przypadku wystąpienia **nadmiaru** (przepełnienia) oraz przy dzieleniu przez zero

Standard IEEE 754 - wartości specjalne

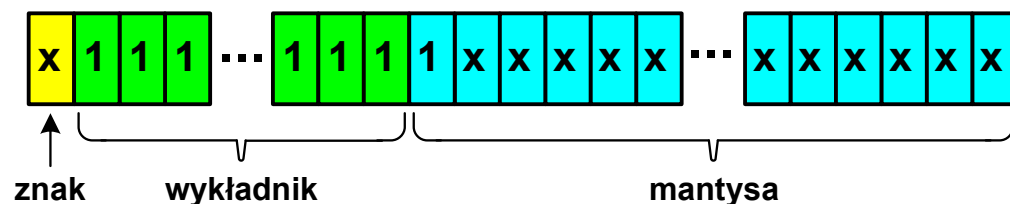
■ Liczba zdenormalizowana:



- Pojawia się, gdy występuje **niedomiar** (ang. **underflow**), ale wynik operacji można jeszcze zapisać denormalizując mantysę
- Mantysa nie posiada domyślnej części całkowitej równej **1**, tzn. reprezentuje liczbę o postaci **0,xxx...xxx**, a nie **1,xxx...xxx**

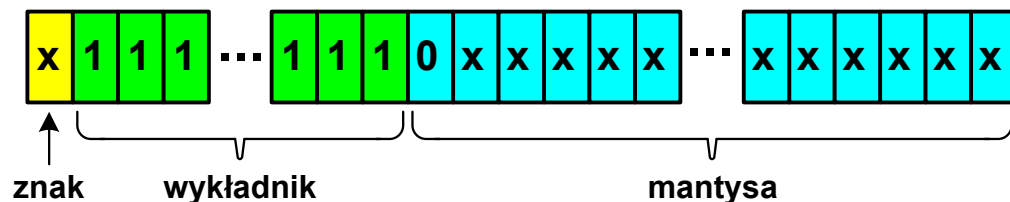
Standard IEEE 754 - wartości specjalne

- **Nieliczby** - **NaN** (**Not A Number**) - nie reprezentują wartości liczbowej
- Powstają w wyniku wykonania niedozwolonej operacji
- **QNaN** (ang. **Quiet NaN**) - ciche nieliczby



- „przechodzą” przez działania arytmetyczne (brak przerwania wykonywania programu)

- **SNaN** (ang. **Signaling NaN**) - sygnalizujące, istotne, głośne nieliczby



- zgłoszenie wyjątku (przerwanie wykonywania programu)

Standard IEEE 754 - wartości specjalne

- Standard IEEE 754 definiuje dokładnie wyniki operacji, w których występują specjalne argumenty

Operacja	Wynik
$x / \pm\infty$	0
$\pm\infty \cdot \pm\infty$	$\pm\infty$
$\pm\text{wart_niezer} / 0$	$\pm\infty$
$\infty + \infty$	∞
$\pm 0 / \pm 0$	NaN
$\infty - \infty$	NaN
$\pm\infty / \pm\infty$	NaN
$\pm\infty \cdot 0$	NaN

Język C - operacje z wartościami specjalnymi

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

int main()
{
    float x = 0.0;
    printf("1.0/0.0      = %f\n", 1.0/x);
    printf("-1.0/0.0      = %f\n", -1.0/x);
    printf("0.0/0.0      = %f\n", 0.0/x);
    printf("sqrt(-1.0) = %f\n", sqrt(-1.0));
    printf("1.0/INF      = %f\n", 1.0/(1.0/x));
    printf("0*INF        = %f\n", 0.0*(1.0/x));

    return 0;
}
```

```
1.0/0.0      = 1.#INF00
-1.0/0.0     = -1.#INF00
0.0/0.0      = -1.#IND00
sqrt(-1.0)   = -1.#IND00
1.0/INF      = 0.000000
0*INF        = -1.#IND00
```

Operacja	Wynik
$x / \pm\infty$	0
$\pm\infty \cdot \pm\infty$	$\pm\infty$
$\pm\text{wart_niezer} / 0$	$\pm\infty$
$\infty + \infty$	∞
$\pm 0 / \pm 0$	NaN
$\infty - \infty$	NaN
$\pm\infty / \pm\infty$	NaN
$\pm\infty \cdot 0$	NaN

- Środowisko: Microsoft Visual C++ 2008 Express Edition

Reprezentacja liczb zmiennoprzecinkowych w C

- Typy zmiennoprzecinkowe w języku C:

<u>Nazwa typu</u>	<u>Rozmiar (bajty)</u>	<u>Zakres wartości</u>	<u>Cyfry znaczące</u>
float	4 bajty	$-3,4 \cdot 10^{38} \dots 3,4 \cdot 10^{38}$	7-8
double	8 bajtów	$-1,8 \cdot 10^{308} \dots 1,8 \cdot 10^{308}$	15-16
long double	10 bajtów	$-1,2 \cdot 10^{4932} \dots 1,2 \cdot 10^{4932}$	19-20

- Typ **long double** może mieć także inny rozmiar:

<u>Środowisko</u>	<u>Rozmiar (bajty)</u>
MS Visual C++ 2008 EE	8 bajtów
Borland Turbo C++ Explorer	10 bajtów
Dev-C++	12 bajtów

Reprezentacja liczb zmiennoprzecinkowych w C

```
#include <stdio.h>

int main()
{
    float      sf = 0.0f;
    double     sd = 0.0;
    long double slg = 0.0L;
    int i;

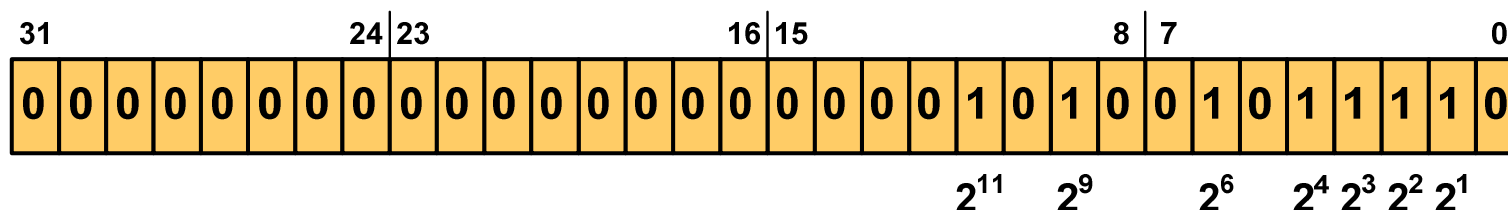
    for(i=0; i<10000; i++)
    {
        sf = sf + 0.01f;
        sd = sd + 0.01;
        slg = slg + 0.01L;
    }

    printf("float:          %.20f\n", sf);
    printf("double:         %.20f\n", sd);
    printf("long double:      %.20Lf\n", slg);

    return 0;
}
```

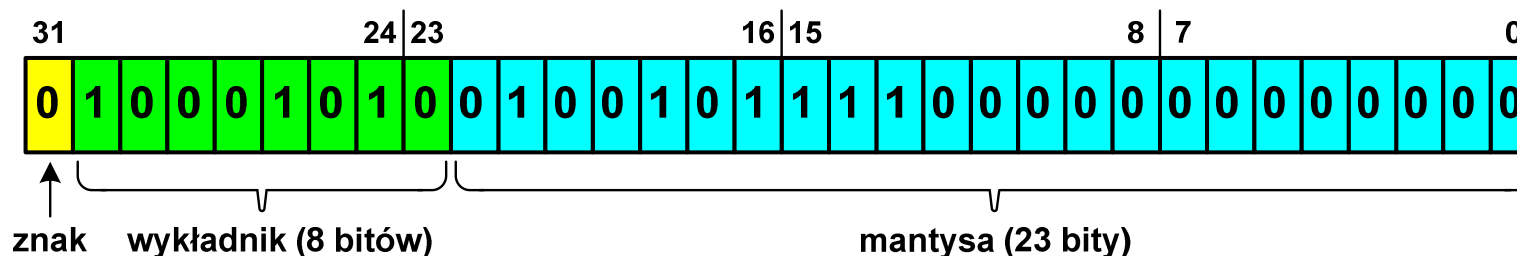

Liczba $2654_{(10)}$ jako całkowita i rzeczywista w C

- **int** (4 bajty): $2654_{(10)} = 00\ 00\ 0A\ 5E_{(16)}$



$$2^{11} + 2^9 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 = 2048 + 512 + 64 + 16 + 8 + 4 + 2 = 2654_{(10)}$$

- **float** (4 bajty): $2654_{(10)} = 45\ 25\ E0\ 00_{(IEEE\ 754)}$



$$+ 138 - 127 = 11_{(10)}$$

$$1.0100101111_{(2)} = 1.2958984_{(10)}$$

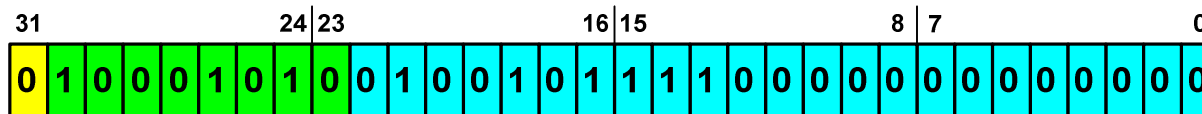
$$1.2958984 \cdot 2^{11} = 2654_{(10)}$$

Język C - nieprawidłowy specyfikator formatu

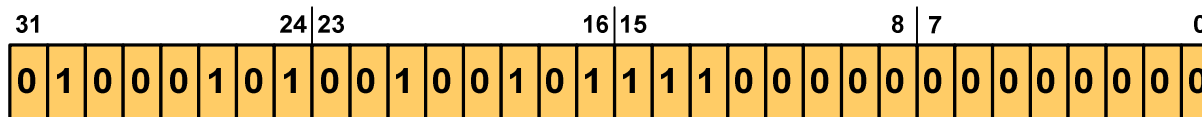
```
int x;  
  
printf("x (%f) = "); scanf("%f", &x);  
printf("x (%d) = %d\n", x);  
printf("x (%f) = %f\n", x);  
printf("x (%e) = %e\n", x);
```

```
x (%f) = 2654  
x (%d) = 1160110080  
x (%f) = 0.000000  
x (%e) = 5.731705e-315
```

- Zgodnie ze standardem języka C wynik jest **niezdefiniowany**
- Zapamiętana wartość:



- Wyświetlona wartość przy wykorzystaniu **%d**:



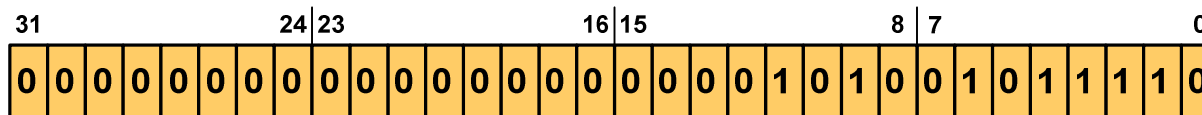
$$2^{30} + 2^{26} + 2^{24} + 2^{21} + 2^{18} + 2^{16} + 2^{15} + 2^{14} + 2^{13} = 1.160.110.080_{(10)}$$

Język C - nieprawidłowy specyfikator formatu

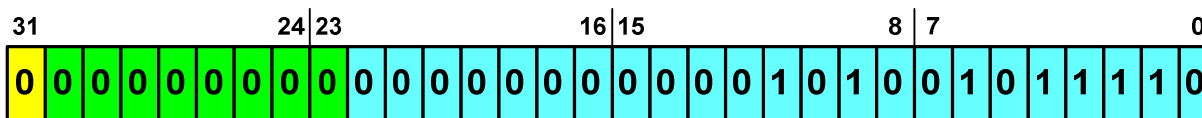
```
float x;  
  
printf("x (%d) = "); scanf("%d", &x);  
printf("x (%d) = %d\n", x);  
printf("x (%f) = %f\n", x);  
printf("x (%e) = %e\n", x);
```

```
x (%d) = 2654  
x (%d) = 0  
x (%f) = 0.000000  
x (%e) = 3.719046e-042
```

- Zgodnie ze standardem języka C wynik jest **niezdefiniowany**
- Zapamiętana wartość:



- Wyświetlona wartość przy wykorzystaniu **%e**:



Liczba zdenormalizowana: 3,719046E-42

Koniec wykładu nr 4

Dziękuję za uwagę!
(następny wykład: 05.04.2019)