Informatyka 1

Politechnika Białostocka - Wydział Elektryczny

Elektrotechnika, semestr II, studia niestacjonarne I stopnia

Rok akademicki 2018/2019

Wykład nr 4 (29.03.2019)

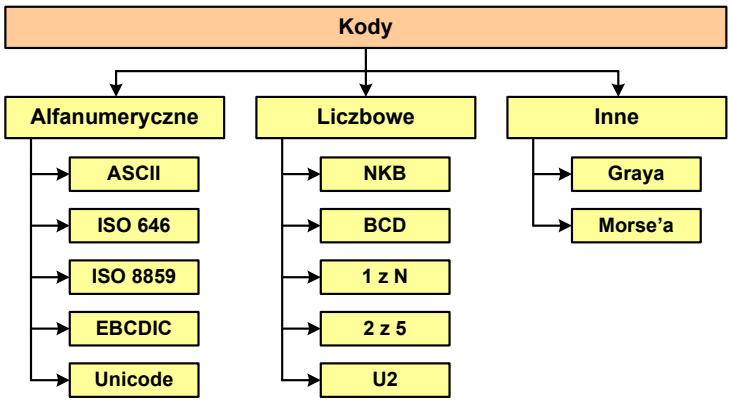
dr inż. Jarosław Forenc

Plan wykładu nr 4

- Kodowanie liczb
  - NKB, BCD, 2 z 5, Graya
- Reprezentacja liczb całkowitych
  - bez znaku, ze znakiem (ZM, U1, U2)
- Reprezentacja zmiennoprzecinkowa
  - zapis zmiennoprzecinkowy liczby rzeczywistej, postać znormalizowana
  - zakres liczb zmiennoprzecinkowych
- Standard IEEE 754
  - liczby 32-bitowe i 64-bitowe, zakres i precyzja liczb
  - wartości specjalne, operacje z wartościami specjalnymi

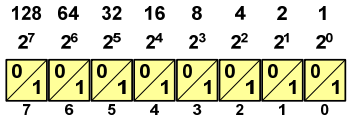
Kodowanie

- Kodowanie - proces przekształcania jednego rodzaju postaci informacji na inną postać



Kody liczbowe - Naturalny Kod Binarny (NKB)

- Jeżeli dowolnej liczbie dziesiętnej przypiszemy odpowiadającą jej liczbę binarną, to otrzymamy naturalny kod binarny (NKB)



Liczba dziesiętna	Kod NKB
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111

Liczba dziesiętna	Kod NKB
8	1000
9	1001
10	1010
11	1011
12	1100
13	1101
14	1110
15	1111

Kody liczbowe - Kod BCD

- Binary-Coded Decimal - dziesiętny zakodowany dwójkowo
- BCD - sposób zapisu liczb polegający na zakodowaniu kolejnych cyfr liczby dziesiętnej w 4-bitowym systemie dwójkowym (NKB)

Cyfra dziesiętna	BCD	Cyfra dziesiętna	BCD
0	0000	5	0101
1	0001	6	0110
2	0010	7	0111
3	0011	8	1000
4	0100	9	1001

- W ogólnym przypadku kodowane są tylko znaki 0 ÷ 9
- Pozostałe kombinacje bitowe mogą być stosowane do kodowania znaku liczby lub innych znaczników.

Kody liczbowe - Kod BCD

- Przykład:

$168_{(10)} = ?_{(BCD)}$

$\underbrace{0001}_{1}\ \underbrace{0110}_{6}\ \underbrace{1000}_{8}$

$168_{(10)} = 000101101000_{(BCD)}$

$1001\,|\,0101\,|\,0011_{(BCD)} = ?_{(10)}$

$\underbrace{1001}_{9}\ \underbrace{0101}_{5}\ \underbrace{0011}_{3}$

$100101010011_{(BCD)} = 953_{(10)}$

- Zastosowania:
  - urządzenia elektroniczne z wyświetlaczem cyfrowym (np. kalkulatory, mierniki cyfrowe, kasy sklepowe, wagi)
  - przechowywania daty i czasu w BIOSie komputerów (także wczesne modele PlayStation 3)
  - zapis części ułamkowych kwot (systemy bankowe).

Kody liczbowe - Kod BCD: przechowywanie liczb

- Użycie 4 najmłodszych bitów jednego bajta, 4 starsze bity są ustawiane na jakąś konkretną wartość:
  - 0000
  - 1111 (np. kod EBCDIC, liczby $F0_{(16)} \div F9_{(16)}$)
  - 0011 (tak jak w ASCII, liczby $30_{(16)} \div 39_{(16)}$)
- Zapis dwóch cyfr w każdym bajcie (starsza na starszej połówce, młodsza na młodszej połówce) - jest to tzw. spakowane BCD
  - w przypadku liczby zapisanej na kilku bajtach, najmniej znacząca tetrada (4 bity) używane są jako flaga znaku
  - standardowo przyjmuje się 1100 ($C_{(16)}$) dla znaku plus (+) i 1101 ($D_{(16)}$) dla znaku minus (-), np.

$$127_{(10)} = 0001\ 0010\ 0111\ 1100 \quad (127C_{(16)})$$
$$-127_{(10)} = 0001\ 0010\ 0111\ 1101 \quad (127D_{(16)})$$

Kody liczbowe - Kod BCD

- Warianty kodu BCD:

Cyfra dziesiętna	BCD 8421	Excess-3	BCD 2421	BCD 84-2-1	IBM 1401 BCD 8421
0	0000	0011	0000	0000	1010
1	0001	0100	0001	0111	0001
2	0010	0101	0010	0110	0010
3	0011	0110	0011	0101	0011
4	0100	0111	0100	0100	0100
5	0101	1000	1011	1011	0101
6	0110	1001	1100	1010	0110
7	0111	1010	1101	1001	0111
8	1000	1011	1110	1000	1000
9	1001	1100	1111	1111	1001

- Podstawowy wariant: BCD 8421 (SBCD - Simple Binary Coded Decimal)

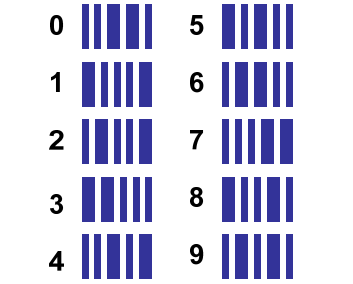
Kody liczbowe - Kod 2 z 5

- Kod 5-bitowy: 2 bity zawsze równe 1, a 3 bity zawsze równe 0
- Koduje 10 znaków (cyfry dziesiętne), kody nie są wzajemnie jednoznaczne (ta sama wartość może być zakodowana w różny sposób)
- Kod stałowagowy
- Kod detekcyjny
- Stosowany głównie w kodach kreskowych

Liczba dziesiętna	2 z 5 (01236)	2 z 5 (01234)	2 z 5 (74210)
0	01100	01100	11000
1	11000	11000	00011
2	10100	10100	00101
3	10010	10010	00110
4	01010	01010	01001
5	00110	00110	01010
6	10001	10001	01100
7	01001	01001	10001
8	00101	00101	10010
9	00011	00011	10100

Kody liczbowe - Kod 2 z 5 Industrial (1960 r.)

- Jednowymiarowy kod kreskowy kodujący cyfry: $0 \div 9$
- Znak to 5 pasków: 2 szerokie i 3 wąskie
- Szeroki pasek jest wielokrotnością wąskiego, szerokości muszą być takie same dla całego kodu
- Struktura kodu:
  - start: 11011010
  - numer
  - stop: 11010110



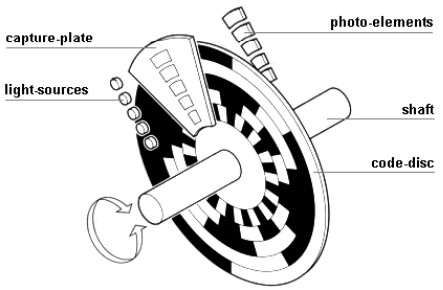
Kod Graya (refleksyjny)

- Kod dwójkowy, bezwagowy, niepozycyjny
- Dwa kolejne słowa kodowe różnią się stanem jednego bitu
- Kod cykliczny - ostatni i pierwszy wyraz również różnią się stanem jednego bitu

kod 1-bitowy	kod 2-bitowy	kod 3-bitowy
0	00	000
1	01	001
	11	011
	10	010
		110
		111
		101
		100

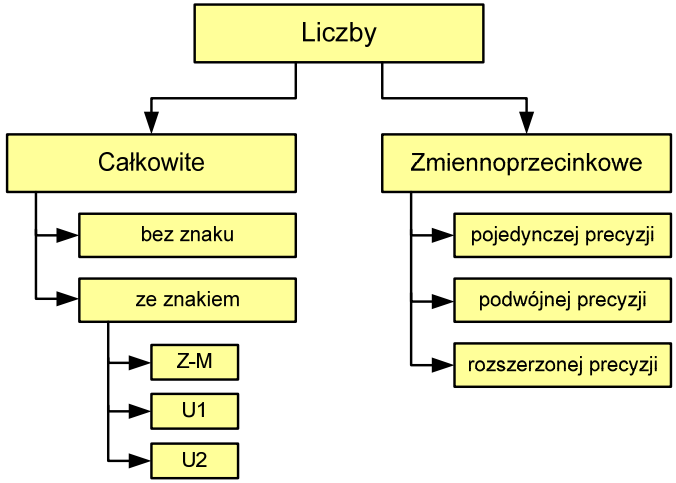
Kod Graya

- Stosowany w przetwornikach analogowo-cyfrowych, do cyfrowego pomiaru analogowych wielkości mechanicznych (np. kąt obrotu)



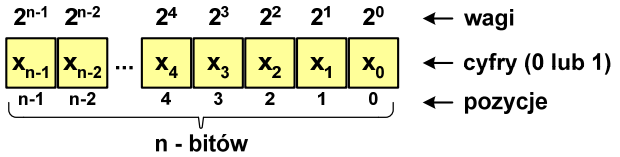
http://tams-www.informatik.uni-hamburg.de
/applets/hades/webdemos/10-gates/15-graycode/dual2gray.html

Reprezentacja liczb w systemach komputerowych



Liczby całkowite bez znaku

- Zapis liczby w systemie dwójkowym:



- Używając n-bitów można zapisać liczbę z zakresu:

$$X_{(2)} = \langle 0,\ 2^n - 1 \rangle$$

$8-bitów$	0 ... 255
$16-bitów$	0 ... 65 535
$32-bity$	0 ... 4 294 967 295
$64-bity$	0 ... 18 446 744 073 709 551 615

18 trylionów 446 biliardów 744 biliony 73 miliardy 709 milionów 551 tysięcy 615

Liczby całkowite bez znaku w języku C

- Typy zmiennych całkowitych bez znaku stosowane w języku C:

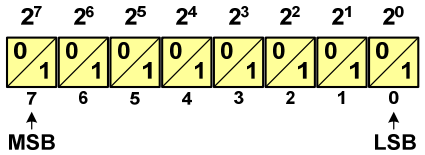
Nazwa typu	Rozmiar (bajty)	Zakres wartości
unsigned char	1 bajt	0 … 255
unsigned short int	2 bajty	0 … 65 535
unsigned int	4 bajty	0 … 4 294 967 295
unsigned long int	4 bajty	0 … 4 294 967 295
unsigned long long int	8 bajtów	0 … 18 446 744 073 709 551 615

- W nazwach typów short i long można pominąć słowo int:

unsigned short int	→	unsigned short
unsigned long int	→	unsigned long
unsigned long long int	→	unsigned long long

Liczby całkowite bez znaku w języku C

- Typ unsigned char (1 bajt):

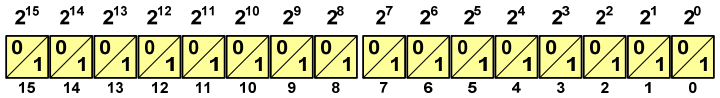


  - MSB (Most Significant Bit) - najbardziej znaczący bit, najstarszy bit, największa waga
  - LSB (Least Significant Bit) - najmniej znaczący bit, najmłodszy bit, najmniejsza waga

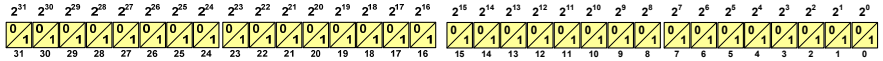
- Zakres wartości:
  - dolna granica: $0000\ 0000_{(2)} = 00_{(16)} = 0_{(10)}$
  - górna granica: $1111\ 1111_{(2)} = FF_{(16)} = 255_{(10)}$

Liczby całkowite bez znaku w języku C

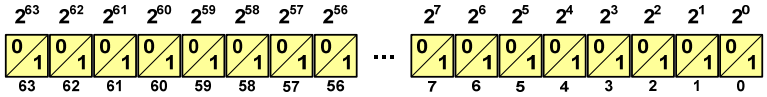
- Typ unsigned short int (2 bajty):



- Typy unsigned int (4 bajty) i unsigned long int (4 bajty):



- Typ unsigned long long int (8 bajtów):



Liczby całkowite bez znaku w języku C

```
unsigned short int:      65535 0 1
unsigned int:            4294967295 0 1
unsigned long int:       4294967295 0 1
unsigned long long int: 18446744073709551615 0 1
```

```
#include <stdi
int main()   /* przepełnienie zmiennej, ang. integer overflow */
{
   unsigned short int      usi = 65535;
   unsigned int             ui = 4294967295;
   unsigned long int       uli = 4294967295;
   unsigned long long int ulli = 18446744073709551615;

   printf("unsigned short int:     %hu %hu %hu\n",usi,usi+1,usi+2);
   printf("unsigned int:           %u %u %u\n",ui,ui+1,ui+2);
   printf("unsigned long int:      %lu %lu %lu\n",uli,uli+1,uli+2);
   printf("unsigned long long int: %llu %llu %llu\n",
                                    ulli,ulli+1,ulli+2);
   return 0;
}
```

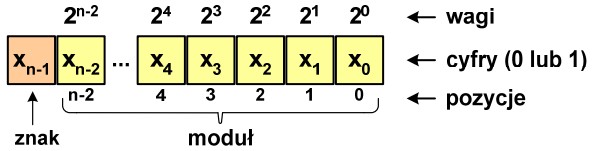

Liczby całkowite bez znaku w języku C

```
unsigned short int:      1 0 65535
unsigned int:            1 0 4294967295
unsigned long int:       1 0 4294967295
unsigned long long int: 1 0 18446744073709551615
```

```
#include <stdi
int main()   /* przepełnienie zmiennej, ang. integer overflow */
{
   unsigned short int      usi = 1;
   unsigned int             ui = 1;
   unsigned long int       uli = 1;
   unsigned long long int ulli = 1;

   printf("unsigned short int:     %hu %hu %hu\n",usi,usi-1,usi-2);
   printf("unsigned int:           %u %u %u\n",ui,ui-1,ui-2);
   printf("unsigned long int:      %lu %lu %lu\n",uli,uli-1,uli-2);
   printf("unsigned long long int: %llu %llu %llu\n",
                                    ulli,ulli-1,ulli-2);
   return 0;
}
```


Liczby całkowite ze znakiem - kod znak-moduł

- Inne nazwy: ZM, Z-M, SM (Signed Magnitude), S+M
- Najstarszy bit jest bitem znaku liczby: 0 - dodatnia, 1 - ujemna
- Pozostałe bity mają takie same znaczenie jak w NKB



- Wartość liczby:

$$X_{(10)} = \underbrace{(x_0 \cdot 2^0 + x_1 \cdot 2^1 + x_2 \cdot 2^2 + \ldots + x_{n-2} \cdot 2^{n-2})}_{\text{moduł}} \cdot \underbrace{(-1)^{x_{n-1}}}_{\text{znak}} = (-1)^{x_{n-1}} \cdot \sum_{i=0}^{n-2} x_i \cdot 2^i$$

Liczby całkowite ze znakiem - kod znak-moduł

- Liczby 4-bitowe (1 bit - znak, 3 bity - moduł) w kodzie Z-M:

Z-M	dziesiętnie
0000	+0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7

Z-M	dziesiętnie
1000	-0
1001	-1
1010	-2
1011	-3
1100	-4
1101	-5
1110	-6
1111	-7

- dwie reprezentacje zera

$+0\ (0000_{ZM})$

$-0\ (1000_{ZM})$

- Zakres liczb dla n-bitów:

$$X_{(10)} = \langle -2^{n-1}+1,\ 2^{n-1}-1 \rangle$$

dla 8 bitów: $\langle -127 \ldots 127 \rangle$

dla 16 bitów: $\langle -32767 \ldots 32767 \rangle$

Liczby całkowite ze znakiem - kod znak-moduł

- Zamiana liczby dziesiętnej na kod Z-M:
  - liczba dodatnia

$$93_{(10)} = ?_{(ZM)}$$

  - zamieniamy liczbę na NKB

$$93_{(10)} = 1011101_{(NKB)}$$

  - dodajemy bit znaku

$$93_{(10)} = 01011101_{(ZM)}$$

  - liczba ujemna

$$-93_{(10)} = ?_{(ZM)}$$

  - zamieniamy moduł liczby na NKB

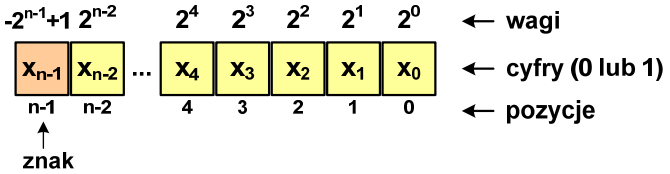
$$|-93_{(10)}| = 93_{(10)} = 1011101_{(NKB)}$$

  - dodajemy bit znaku

$$-93_{(10)} = 11011101_{(ZM)}$$

Liczby całkowite ze znakiem - kod U1

- Inne nazwy: U1, ZU1, uzupełnień do jedności
- Najstarszy bit jest bitem znaku liczby: 0 - dodatnia, 1 - ujemna
- Wszystkie bity liczby posiadają takie same wagi jak w NKB, oprócz pierwszego bitu, który ma wagę $-2^{n-1}+1$



- Wartość liczby:

$$X_{(10)} = x_0 \cdot 2^0 + x_1 \cdot 2^1 + x_2 \cdot 2^2 + \ldots + x_{n-2} \cdot 2^{n-2} + x_{n-1} \cdot (-2^{n-1}+1)$$

Liczby całkowite ze znakiem - kod U1

- Liczby 4-bitowe (1 bit - znak, 3 bity - moduł) w kodzie U1:

U1	dziesiętnie
0000	+0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7

U1	dziesiętnie
1111	-0
1110	-1
1101	-2
1100	-3
1011	-4
1010	-5
1001	-6
1000	-7

- liczby dodatnie zapisywane są tak samo jak w NKB
- liczby ujemne otrzymywane są poprzez bitową negację
- dwie reprezentacje zera

- Zakres liczb dla n-bitów:

$$X_{(10)} = \langle -2^{n-1}+1,\ 2^{n-1}-1 \rangle$$

dla 8 bitów: $\langle -127 \ldots 127 \rangle$

dla 16 bitów: $\langle -32767 \ldots 32767 \rangle$

Liczby całkowite ze znakiem - kod U1

- Zamiana liczby dziesiętnej na kod U1:
  - liczba dodatnia

$$93_{(10)} = ?_{(U1)}$$

  - zamieniamy liczbę na NKB

$$93_{(10)} = 1011101_{(NKB)}$$

  - dodajemy bit znaku: 0

$$93_{(10)} = 01011101_{(U1)}$$

  - liczba ujemna

$$-93_{(10)} = ?_{(U1)}$$

  - zamieniamy moduł liczby na U1

$$\left|-93_{(10)}\right| = 93_{(10)} = 01011101_{(U1)}$$

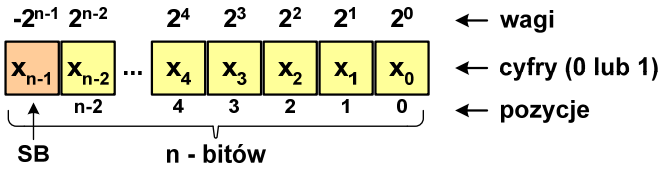
  - negujemy wszystkie bity

$$-93_{(10)} = 10100010_{(U1)}$$

bit znaku

Liczby całkowite ze znakiem - kod U2

- Inne nazwy: ZU2, uzupełnień do dwóch, two's complement
- Najstarszy bit jest bitem znaku liczby: 0 - dodatnia, 1 - ujemna



- Wartość liczby:

$$X_{(10)} = x_0 \cdot 2^0 + x_1 \cdot 2^1 + x_2 \cdot 2^2 + \ldots + x_{n-2} \cdot 2^{n-2} + x_{n-1} \cdot (-2^{n-1})$$

- Kod U2 jest obecnie powszechnie stosowany w informatyce

Liczby całkowite ze znakiem - kod U2

- Liczby 4-bitowe (1 bit - znak, 3 bity - moduł) w kodzie U2:

U2	dziesiętnie
0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7

U2	dziesiętnie
1111	-1
1110	-2
1101	-3
1100	-4
1011	-5
1010	-6
1001	-7
1000	-8

  - brak podwójnej reprezentacji zera
  - liczb ujemnych jest o jeden więcej niż dodatnich
  - 00...000 zawsze oznacza $0_{(10)}$
    11...111 zawsze oznacza $-1_{(10)}$

- Zakres liczb dla n-bitów:

$$X_{(10)} = \left\langle -2^{n-1},\ 2^{n-1} - 1 \right\rangle$$

dla 8 bitów: $\langle -128 \ldots 127 \rangle$

dla 16 bitów: $\langle -32768 \ldots 32767 \rangle$

Liczby całkowite ze znakiem - kod U2

- Zamiana liczby dziesiętnej na kod U2:
  - liczba dodatnia

$$75_{(10)} = ?_{(U2)}$$

  - zamieniamy liczbę na NKB

$$75_{(10)} = 1001011_{(NKB)}$$

  - dodajemy bit znaku: 0

$$75_{(10)} = 01001011_{(U2)}$$

  - liczba ujemna

$$-75_{(10)} = ?_{(U2)}$$

  - zamieniamy moduł liczby na U2

$$\left|-75_{(10)}\right| = 75_{(10)} = 01001011_{(U2)}$$

  - negujemy wszystkie bity i dodajemy 1

$$\begin{array}{rr} & 01001011 \\ \text{negacja:} & 10110100 \\ +1: & 1 \\ \hline -75_{(10)} = 10110101_{(U2)} & \end{array}$$

Liczby całkowite ze znakiem - kod U2 w języku C

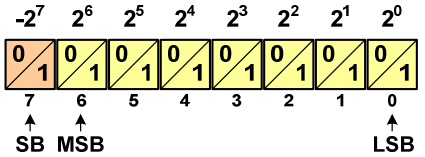
- Typy zmiennych całkowitych ze znakiem stosowane w języku C:

Nazwa typu	Rozmiar (bajty)	Zakres wartości
char	1 bajt	-128 … 127
short int	2 bajty	-32 768 … 32 767
int	4 bajty	-2 147 483 648 … 2 147 483 647
long int	4 bajty	-2 147 483 648 … 2 147 483 647
long long int	8 bajtów	-9 223 372 036 854 775 808 … 9 223 372 036 854 775 807

- Przed nazwą każdego z powyższych typów można dodać signed
  signed char, signed short int, signed int …
- W nazwach typów short i long można pominąć słowo int:
  short int → short, long int → long, long long int → long long

Liczby całkowite ze znakiem - kod U2 w języku C

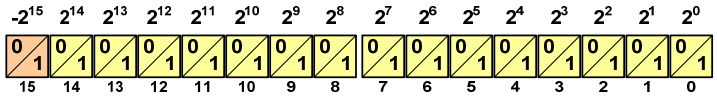
- Typ char / signed char (1 bajt):



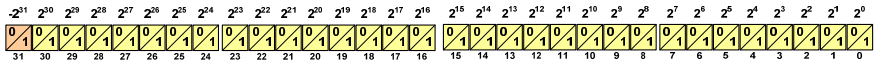
- Zakres wartości:
  - dolna granica: $1000\ 0000_{(2)} = -128_{(10)}$
  - górna granica: $0111\ 1111_{(2)} = 127_{(10)}$
  - inne wartości: $1111\ 1111_{(2)} = -1_{(10)}$
    $0000\ 0000_{(2)} = 0_{(10)}$

Liczby całkowite bez znaku w języku C

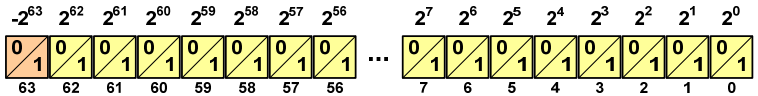
- Typ short / signed short int (2 bajty):



- Typy int / signed int (4 bajty) i long / signed long int (4 bajty):



- Typ long long int / signed long long int (8 bajtów):



Liczby całkowite ze znakiem - kod U2 w języku C

```
short int:      32767 -32768 -32767
int:            2147483647 -2147483648 -2147483647
long int:       2147483647 -2147483648 -2147483647
long long int: 9223372036854775807 -9223372036854775808
```

```
#includ

int main()   /* przepełnienie zmiennej, ang. integer overflow */
{
   short int      si = 32767;
   int             i = 2147483647;
   long int       li = 2147483647;
   long long int lli = 9223372036854775807;

   printf("short int:      %hd %hd %hd\n",si,si+1,si+2);
   printf("int:            %d %d %d\n",i,i+1,i+2);
   printf("long int:       %ld %ld %ld\n",li,li+1,li+2);
   printf("long long int: %lld %lld\n",lli,lli+1);

   return 0;
}
```

Zapis zmiennoprzecinkowy liczby rzeczywistej

- Zapis bardzo dużych lub małych liczb wymaga dużej liczby cyfr
- Znacznie prostsze jest przedstawienie liczb w postaci zmiennoprzecinkowej (ang. floating point numbers)
  - 12 000 000 000 000 = $1{,}2 \cdot 10^{13}$
  - 0,000 000 000 001 = $1{,}0 \cdot 10^{-12}$
- Zapis liczby zmiennoprzecinkowej ma postać:

$$L = M \cdot B^E$$

gdzie:

L - wartość liczby
M - mantysa
B - podstawa systemu
E - wykładnik, cecha

- notacja naukowa: 1,2e13 1,2e+13 1,2E13 1,2E+13
- postać wykładnicza: $1{,}2 \cdot 10^{13}$

Zapis zmiennoprzecinkowy liczby rzeczywistej

$2{,}43 \cdot 10^{3}_{(10)} = 2{,}43 \cdot 1000 = 2430_{(10)}$

$6{,}59 \cdot 10^{-2}_{(10)} = 6{,}59 \cdot 0{,}01 = 0{,}0659_{(10)}$

$1{,}011 \cdot 10^{101}_{(2)} = ?_{(10)}$

$M = 1{,}011_{(2)} = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} = 1{,}375_{(10)}$

$B = 10_{(2)} = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 = 2_{(10)}$

$E = 101_{(2)} = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 = 1 + 4 = 5_{(10)}$

$1{,}011 \cdot 10^{101}_{(2)} = 1{,}375 \cdot 2^5 = 1{,}375 \cdot 32 = 44_{(10)}$

$3{,}121 \cdot 10^{32}_{(4)} = ?_{(10)}$

$M = 3{,}121_{(4)} = 3 \cdot 4^0 + 1 \cdot 4^{-1} + 2 \cdot 4^{-2} + 1 \cdot 4^{-3} = 3{,}390625_{(10)}$

$B = 10_{(4)} = 0 \cdot 4^0 + 1 \cdot 4^1 = 4_{(10)}$

$E = 32_{(4)} = 2 \cdot 4^0 + 3 \cdot 4^1 = 2 + 12 = 14_{(10)}$

$3{,}121 \cdot 10^{32}_{(4)} = 3{,}390625 \cdot 4^{14} = 910\,163\,968_{(10)}$

Postać znormalizowana zapisu liczby

- Położenie przecinka w mantysie nie jest ustalone i może się zmieniać
- Poniższe zapisy oznaczają tę samą liczbę (system dziesiętny)

$243 \cdot 10^1 = 24{,}3 \cdot 10^2 = 2{,}43 \cdot 10^3 = 0{,}243 \cdot 10^4$

- Dla ujednolicenia zapisu i usunięcia wielokrotnych reprezentacji tej samej liczby, przyjęto tzw. postać znormalizowaną zapisu liczby
- W postaci znormalizowanej mantysa spełnia nierówność:

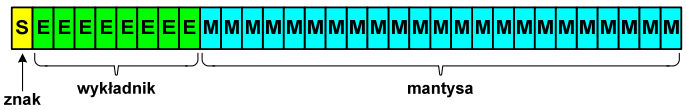
$$B > |M| \geq 1$$

Przykład:

$2{,}43 \cdot 10^3$ - to jest postać znormalizowana, gdyż: $10 > |2{,}43| \geq 1$
$0{,}243 \cdot 10^4$ - to nie jest postać znormalizowana
$24{,}3 \cdot 10^2$ - to nie jest postać znormalizowana

Liczby zmiennoprzecinkowe w systemie binarnym

- Liczba bitów przeznaczonych na mantysę i wykładnik jest ograniczona



- Wartość liczby L:

$$L = (-1)^S \cdot M \cdot B^E$$

gdzie:

S - znak liczby (ang. sign), przyjmuje wartość 0 lub 1
M - znormalizowana mantysa (ang. mantissa), liczba ułamkowa
B - podstawa systemu liczbowego (ang. base)
E - wykładnik (ang. exponent), cecha, liczba całkowita

- W systemie binarnym podstawa systemu jest stała: B = 2

$$L = (-1)^S \cdot M \cdot 2^E$$

Przesunięcie wykładnika

- Wykładnik zapisywany jest z przesunięciem (ang. bias)

$$L = (-1)^S \cdot M \cdot 2^{E-BIAS}$$

gdzie:

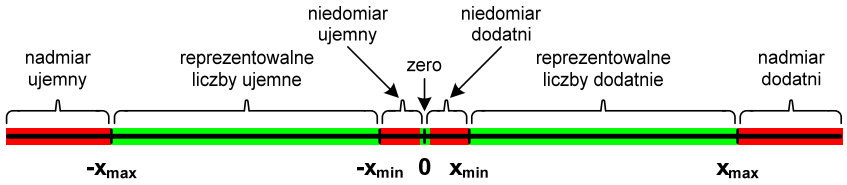
L - wartość liczby S - znak liczby M - mantysa
E - wykładnik BIAS - przesunięcie (nadmiar)

- Typowe wartości przesunięcia (nadmiaru) wynoszą:
  - formatu 32-bitowy: $2^7-1 = 127_{(10)} = 7F_{(16)}$
  - formatu 64-bitowy: $2^{10}-1 = 1023_{(10)} = 3FF_{(16)}$
  - formatu 80-bitowy: $2^{14}-1 = 16383_{(10)} = 3FFF_{(16)}$

Zakres liczb zmiennoprzecinkowych

- Zakres liczb w zapisie zmiennoprzecinkowym:

$$\langle -x_{max}, -x_{min} \rangle \cup \{0\} \cup \langle x_{min}, x_{max} \rangle$$



- Największa i najmniejsza wartość liczby w danej reprezentacji:

$$x_{min} = M_{min} \cdot B^{E_{min}} \qquad x_{max} = M_{max} \cdot B^{E_{max}}$$

Standard IEEE 754

- IEEE Std. 754-2008 - IEEE Standard for Floating-Point Arithmetic
- Standard definiuje następujące klasy liczb zmiennoprzecinkowych:

Precyzja	Długość słowa [bity]	Znak [bity]	Wykładnik		Mantysa	
			Długość [bity]	Zakres	Długość [bity]	Cyfry znaczące
Pojedyncza (Single Precision, binary32)	32	1	8	$2^{\pm 127} \approx 10^{\pm 38}$	23	7
Pojedyncza rozszerzona (Single Extended)	≥ 43	1	≥ 11	$\geq 2^{\pm 1023} \approx 10^{\pm 308}$	≥ 31	≥ 10
Podwójna (Double Precision, binary64)	64	1	11	$2^{\pm 1023} \approx 10^{\pm 308}$	52	16
Podwójna rozszerzona (Double Extended)	≥ 79	1	≥ 15	$\geq 2^{\pm 16383} \approx 10^{\pm 4932}$	≥ 63	≥ 19

źródło: Gryś S.: „Arytmetyka komputerów w praktyce". PWN, Warszawa, 2007 (str. 116).

Standard IEEE 754

- W przypadku liczb:
  - pojedynczej rozszerzonej precyzji (ang. Single Precision)
  - podwójnej rozszerzonej precyzji (ang. Double Precision)

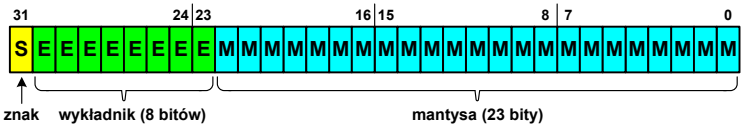
  standard podaje jedynie minimalną liczbę bitów pozostawiając szczegóły implementacji producentom procesorów i kompilatorów
- Bardzo popularny jest 80-bitowy format podwójnej rozszerzonej precyzji (Extended Precision) wprowadzony przez firmę Intel
- W 80-bitowym formacie Intela:
  - długość słowa: 80 bitów
  - znak: 1 bit
  - wykładnik: 15 bitów (zakres: $2^{\pm 16383} \approx 10^{\pm 4932}$)
  - mantysa: 63 bity (cyfry znaczące: 19)

Standard IEEE 754

- Standard IEEE 754 definiuje także dziesiętne typy zmiennoprzecinkowe (operujące na cyfrach dziesiętnych):
  - decimal32 (32 bity, 7 cyfr dziesiętnych)
  - decimal64 (64 bity, 16 cyfr dziesiętnych)
  - decimal128 (128 bitów, 34 cyfry dziesiętnych)
- Standard IEEE 754 definiuje także:
  - sposób reprezentacji specjalnych wartości, np. nieskończoności, zera
  - sposób wykonywania działań na liczbach zmiennoprzecinkowych
  - sposób zaokrąglania liczb

Standard IEEE 754 - liczby 32-bitowe

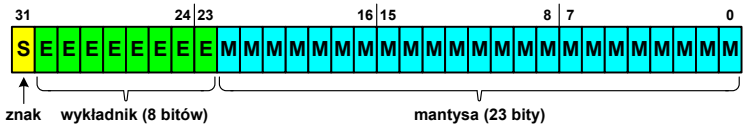
- Liczba pojedynczej precyzji przechowywana jest na 32 bitach:



- Pierwszy bit w zapisie (bit nr 31) jest bitem znaku (0 - liczba dodatnia, 1 - liczba ujemna)
- Wykładnik zapisywany jest na 8 bitach (bity nr 30-23) z nadmiarem o wartości 127
- Wykładnik może przyjmować wartości od -127 (wszystkie bity wyzerowane) do 128 (wszystkie bity ustawione na 1)

Standard IEEE 754 - liczby 32-bitowe

- Liczba pojedynczej precyzji przechowywana jest na 32 bitach:



- Mantysa w większości przypadków jest znormalizowana
- Wartość mantysy zawiera się pomiędzy 1 a 2, a zatem w zapisie liczby pierwszy bit jest zawsze równy 1
- Powyższy bit nie jest zapamiętywany, natomiast jest automatycznie uwzględniany podczas wykonywania obliczeń
- Dzięki pominięciu tego bitu zyskujemy dodatkowy bit mantysy (zamiast 23 bitów mamy 24 bity)

Standard IEEE 754 - liczby 32-bitowe

- Przykład:
  - obliczmy wartość dziesiętną liczby zmiennoprzecinkowej

$$01000010110010000000000000000000_{(IEEE754)} = ?_{(10)}$$

  - dzielimy liczbę na części

$$\underbrace{0}_{\text{S-bit znaku}} \quad \underbrace{10000101}_{\text{E-wykładnik}} \quad \underbrace{10010000000000000000000}_{\text{M-mantysa (tylko czesc ulamkowa)}}$$

  - określamy znak liczby

$$S = 0 \quad -\text{liczba dodatnia}$$

  - obliczamy wykładnik (nadmiar: 127)

$$10000101_{(2)} = 128 + 4 + 1 = 133 \quad \Rightarrow \quad E = 133 - \underbrace{127}_{nadmiar} = 6_{(10)}$$

Standard IEEE 754 - liczby 32-bitowe

- Przykład (cd.):
  - wyznaczamy mantysę dopisując na początku 1, (część całkowita)

$$M = 1{,}10010000000000000000000 =$$
$$= 1\cdot 2^{0} + 1\cdot 2^{-1} + 1\cdot 2^{-4} = 1 + 0{,}5 + 0{,}0625 = 1{,}5625_{(10)}$$

  - wzór na wartość dziesiętną liczby zmiennoprzecinkowej:

$$L = (-1)^{S}\cdot M\cdot 2^{E}$$

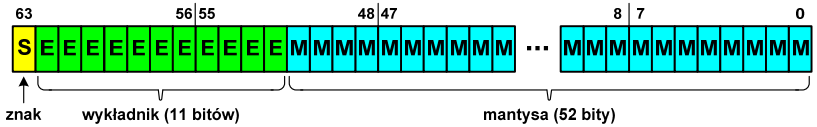
  - podstawiając otrzymujemy:

$$S = 0, \qquad E = 6_{(10)}, \qquad M = 1{,}5625_{(10)}$$
$$L = (-1)^{0}\cdot 1{,}5625\cdot 2^{6} = 100_{(10)}$$

$$01000010110010000000000000000000_{(IEEE754)} = 100_{(10)}$$

Standard IEEE 754 - liczby 64-bitowe

- Liczba podwójnej precyzji przechowywana jest na 64 bitach:



- Pierwszy bit w zapisie (bit nr 63) jest bitem znaku (0 - liczba dodatnia, 1 - liczba ujemna)
- Wykładnik zapisywany jest na 11 bitach (bity nr 62-52) z nadmiarem o wartości 1023
- Wykładnik może przyjmować wartości od -1023 (wszystkie bity wyzerowane) do 1024 (wszystkie bity ustawione na 1)
- Mantysa zapisywana jest na 52 bitach (pierwszy bit mantysy, zawsze równy 1, nie jest zapamiętywany)

Standard IEEE 754 - zakres liczb

- Pojedyncza precyzja:
  - największa wartość: $\approx 3{,}4\cdot 10^{38}$
  - najmniejsza wartość: $\approx 1{,}4\cdot 10^{-45}$
  - zakres liczb: $\langle -3{,}4\cdot 10^{38} \ldots -1{,}4\cdot 10^{-45}\rangle \cup \{0\} \cup \langle 1{,}4\cdot 10^{-45} \ldots 3{,}4\cdot 10^{38}\rangle$
- Podwójna precyzja:
  - największa wartość: $\approx 1{,}8\cdot 10^{308}$
  - najmniejsza wartość: $\approx 4{,}9\cdot 10^{-324}$
  - zakres liczb: $\langle -1{,}8\cdot 10^{308} \ldots -4{,}9\cdot 10^{-324}\rangle \cup \{0\} \cup \langle 4{,}9\cdot 10^{-324} \ldots 1{,}8\cdot 10^{308}\rangle$
- Podwójna rozszerzona precyzja:
  - największa wartość: $\approx 1{,}2\cdot 10^{4932}$
  - najmniejsza wartość: $\approx 3{,}6\cdot 10^{-4951}$
  - zakres liczb: $\langle -1{,}2\cdot 10^{4932} \ldots -3{,}6\cdot 10^{-4951}\rangle \cup \{0\} \cup \langle 3{,}6\cdot 10^{-4951} \ldots 1{,}2\cdot 10^{4932}\rangle$

Standard IEEE 754 - precyzja liczb

- Precyzja - liczba zapamiętywanych cyfr znaczących w systemie (10)

  4,86452137846 → 4,864521 - 7 cyfr znaczących

- Precyzja liczby zależy od liczby bitów mantysy
- Liczba bitów potrzebnych do zakodowania 1 cyfry dziesiętnej:

$$10^{1} = 2^{n} \quad \rightarrow \quad n = \log_2(10) \approx 3{,}321928$$

- Liczba cyfr dziesiętnych (d) możliwa do zakodowania na m bitach:

  $\log_2(10)$ bitów - 1 cyfra dziesiętna
  m bitów - d cyfr dziesiętnych

$$d = \frac{m}{\log_2(10)}$$

Standard IEEE 754 - precyzja liczb

- Dla formatu pojedynczej precyzji:
  - mantysa: 23 + 1 = 24 bity
  - cyfry znaczące: 7

$$d = \frac{24}{\log_2(10)} = \frac{24}{3{,}321928} = 7{,}2247 \approx 7$$

- Dla formatu podwójnej precyzji:
  - mantysa: 52 + 1 = 53 bity
  - cyfry znaczące: 16

$$d = \frac{53}{\log_2(10)} = \frac{53}{3{,}321928} = 15{,}9546 \approx 16$$

- Dla formatu podwójnej rozszerzonej precyzji:
  - mantysa: 63 + 1 = 64 bity
  - cyfry znaczące: 19

$$d = \frac{64}{\log_2(10)} = \frac{64}{3{,}321928} = 19{,}2659 \approx 19$$

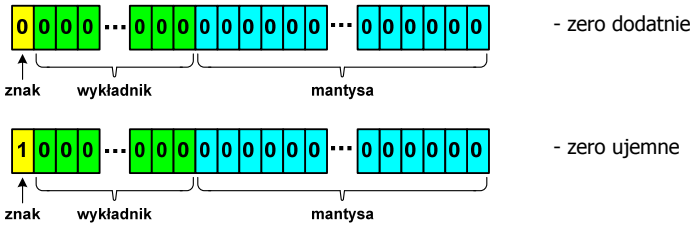
Standard IEEE 754 - precyzja liczb

```
#include <stdio.h>

int main()
{
    float x;
    double y;

    x = 1234567890.0; /* 1.234.567.890 */
    y = 1234567890.0; /* 1.234.567.890 */
    printf("float  -> %f\n",x);
    printf("double -> %f\n\n",y);

    y = 12345678901234567890.0;
    printf("double -> %f\n",y);

    return 0;
}
```

```
float  -> 1234567936.000000
double -> 1234567890.000000

double -> 12345678901234567000.000000
```


Standard IEEE 754 - wartości specjalne

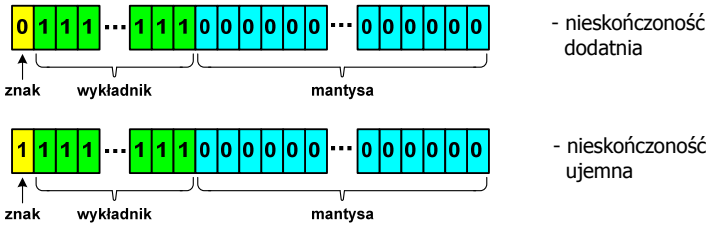
- Zero:



- Podczas porównań zero dodatnie i ujemne są traktowane jako równe sobie

Standard IEEE 754 - wartości specjalne

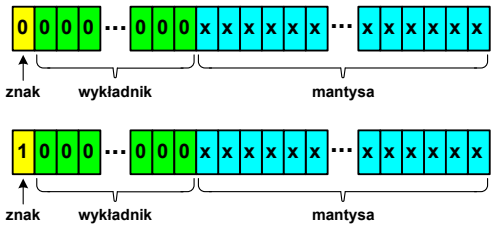
- Nieskończoność:



- Nieskończoność występuje w przypadku wystąpienia nadmiaru (przepełnienia) oraz przy dzieleniu przez zero

Standard IEEE 754 - wartości specjalne

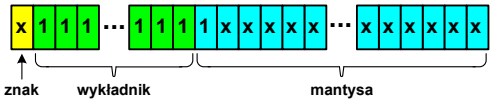
- Liczba zdenormalizowana:



- Pojawia się, gdy występuje niedomiar (ang. underflow), ale wynik operacji można jeszcze zapisać denormalizując mantysę
- Mantysa nie posiada domyślnej części całkowitej równej 1, tzn. reprezentuje liczbę o postaci 0,xxx…xxx, a nie 1,xxx…xxx

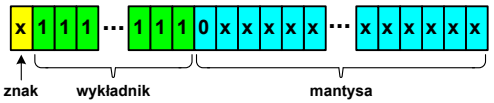
Standard IEEE 754 - wartości specjalne

- Nieliczby - NaN (Not A Number) - nie reprezentują wartości liczbowej
- Powstają w wyniku wykonania niedozwolonej operacji
- QNaN (ang. Quiet NaN) - ciche nieliczby



  - „przechodzą” przez działania arytmetyczne (brak przerwania wykonywania programu)

- SNaN (ang. Signaling NaN) - sygnalizujące, istotne, głośne nieliczby



  - zgłoszenie wyjątku (przerwanie wykonywania programu)

Standard IEEE 754 - wartości specjalne

- Standard IEEE 754 definiuje dokładnie wyniki operacji, w których występują specjalne argumenty

Operacja	Wynik
$x / \pm\infty$	0
$\pm\infty \cdot \pm\infty$	$\pm\infty$
$\pm$wart_niezer / 0	$\pm\infty$
$\infty + \infty$	∞
$\pm 0 / \pm 0$	NaN
$\infty - \infty$	NaN
$\pm\infty / \pm\infty$	NaN
$\pm\infty \cdot 0$	NaN

Język C - operacje z wartościami specjalnymi

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

int main()
{
  float x = 0.0;
  printf("1.0/0.0     = %f\n",1.0/x);
  printf("-1.0/0.0    = %f\n",-1.0/x);
  printf("0.0/0.0     = %f\n",0.0/x);
  printf("sqrt(-1.0)  = %f\n",sqrt(-1.0));
  printf("1.0/INF     = %f\n",1.0/(1.0/x));
  printf("0*INF       = %f\n",0.0*(1.0/x));

  return 0;
}
```

```
1.0/0.0     =  1.#INF00
-1.0/0.0    = -1.#INF00
0.0/0.0     = -1.#IND00
sqrt(-1.0)  = -1.#IND00
1.0/INF     =  0.000000
0*INF       = -1.#IND00
```

- Środowisko: Microsoft Visual C++ 2008 Express Edition

Operacja	Wynik
$x / \pm\infty$	0
$\pm\infty \cdot \pm\infty$	$\pm\infty$
$\pm$wart_niezer / 0	$\pm\infty$
$\infty + \infty$	∞
$\pm 0 / \pm 0$	NaN
$\infty - \infty$	NaN
$\pm\infty / \pm\infty$	NaN
$\pm\infty \cdot 0$	NaN

Reprezentacja liczb zmiennoprzecinkowych w C

- Typy zmiennoprzecinkowe w języku C:

Nazwa typu	Rozmiar (bajty)	Zakres wartości	Cyfry znaczące
float	4 bajty	$-3{,}4\cdot10^{38}$ ... $3{,}4\cdot10^{38}$	7-8
double	8 bajtów	$-1{,}8\cdot10^{308}$ ... $1{,}8\cdot10^{308}$	15-16
long double	10 bajtów	$-1{,}2\cdot10^{4932}$ ... $1{,}2\cdot10^{4932}$	19-20

- Typ long double może mieć także inny rozmiar:

Środowisko	Rozmiar (bajty)
MS Visual C++ 2008 EE	8 bajtów
Borland Turbo C++ Explorer	10 bajtów
Dev-C++	12 bajtów

Reprezentacja liczb zmiennoprzecinkowych w C

```
#include <stdio.h>

int main()
{
    float       sf  = 0.0f;
    double      sd  = 0.0;
    long double slg = 0.0L;
    int i;

    for(i=0; i<10000; i++)
    {
        sf  = sf  + 0.01f;
        sd  = sd  + 0.01;
        slg = slg + 0.01L;
    }

    printf("float:       %.20f\n",sf);
    printf("double:      %.20f\n",sd);
    printf("long double: %.20Lf\n",slg);

    return 0;
}
```


Reprezentacja liczb zmiennoprzecinkowych w C

- Microsoft Visual C++ 2008 Express Edition (long double - 8 bajtów)

```
float:       100.00292575685590000000
double:      100.00000000014250000000
long double: 100.00000000014250000000
```

- Borland Turbo C++ Explorer (long double - 10 bajtów)

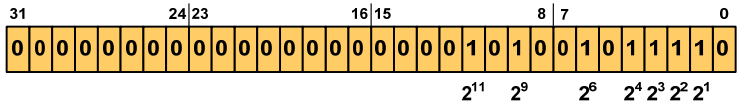
```
float:       100.00292575685593750000
double:      100.00000000014253490000
long double: 100.00000000000013880000
```

- Dev-C++ (long double - 12 bajtów)

```
float:       100.00292575685590000000
double:      100.00000000014250000000
long double: -6805647338419354100000000000000000000000.0000000000000
```

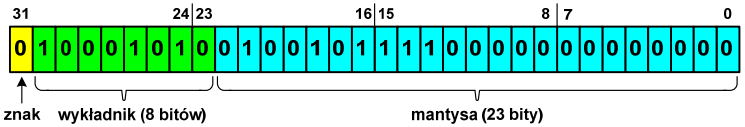

Liczba $2654_{(10)}$ jako całkowita i rzeczywista w C

- int (4 bajty): $2654_{(10)} = 00\ 00\ 0A\ 5E_{(16)}$



$$2^{11} + 2^9 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 = 2048 + 512 + 64 + 16 + 8 + 4 + 2 = 2654_{(10)}$$

- float (4 bajty): $2654_{(10)} = 45\ 25\ E0\ 00_{(IEEE\ 754)}$



$+\ 138 - 127 = 11_{(10)}$ $\qquad 1\ .0100101111_{(2)} = 1.2958984_{(10)}$

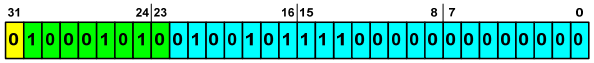
$$1.2958984 \cdot 2^{11} = 2654_{(10)}$$

Język C - nieprawidłowy specyfikator formatu

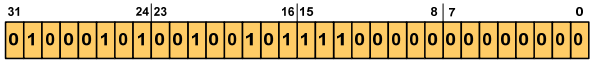
```
int x;
printf("x (%%f) = "); scanf("%f",&x);
printf("x (%%d) = %d\n",x);
printf("x (%%f) = %f\n",x);
printf("x (%%e) = %e\n",x);
```

```
x (%f) = 2654
x (%d) = 1160110080
x (%f) = 0.000000
x (%e) = 5.731705e-315
```

- Zgodnie ze standardem języka C wynik jest niezdefiniowany
- Zapamiętana wartość:



- Wyświetlona wartość przy wykorzystaniu %d:



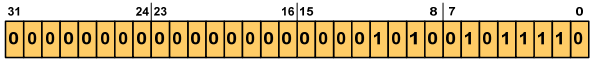
$2^{30} + 2^{26} + 2^{24} + 2^{21} + 2^{18} + 2^{16} + 2^{15} + 2^{14} + 2^{13} = 1.160.110.080_{(10)}$

Język C - nieprawidłowy specyfikator formatu

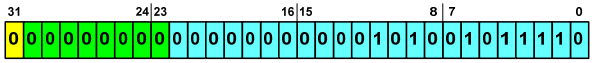
```
float x;
printf("x (%%d) = "); scanf("%d",&x);
printf("x (%%d) = %d\n",x);
printf("x (%%f) = %f\n",x);
printf("x (%%e) = %e\n",x);
```

```
x (%d) = 2654
x (%d) = 0
x (%f) = 0.000000
x (%e) = 3.719046e-042
```

- Zgodnie ze standardem języka C wynik jest niezdefiniowany
- Zapamiętana wartość:



- Wyświetlona wartość przy wykorzystaniu %e:



Liczba zdenormalizowana: 3,719046E-42

Koniec wykładu nr 4

Dziękuję za uwagę!

(następny wykład: 05.04.2019)