

Informatyka 1 (ES1E2009)

Politechnika Białostocka - Wydział Elektryczny
Elektrotechnika, semestr II, studia stacjonarne I stopnia
Rok akademicki 2020/2021

Wykład nr 5 (22.03.2021)

dr inż. Jarosław Forenc

Plan wykładu nr 5

- Język C - tablice jednowymiarowe (wektory)
 - deklaracja, odwołania do elementów, inicjalizacja tablicy
 - generator liczb pseudolosowych, operacje na wektorze
- Reprezentacja liczb całkowitych
 - liczby bez znaku, liczby ze znakiem (ZM, U1, U2)
- Reprezentacja zmiennoprzecinkowa
 - zapis zmiennoprzecinkowy liczby rzeczywistej
 - postać znormalizowana liczby zmiennoprzecinkowej
 - zakres liczb zmiennoprzecinkowych
- Standard IEEE 754
 - liczby 32-bitowe, liczby 64-bitowe
 - zakres i precyzja liczb
 - wartości specjalne, operacje z wartościami specjalnymi

Język C - tablica elementów

- **Tablica** - ciągły obszar pamięci, w którym umieszczone są elementy tego samego typu

wektor

5	3	-2	1	-4
---	---	----	---	----

macierz

a	c	d	m
p	d	q	l
a	t	x	v

1.2	2.5	2.0	10.0
-0.1	4.3	6.2	-5.1
0.0	12.2	4.1	-2.2

Język C - tablica jednowymiarowa

- **Tablica** - ciągły obszar pamięci, w którym umieszczone są elementy tego samego typu
- **Wektor** - tablica jednowymiarowa

5	3	-2	0	-4
---	---	----	---	----

- liczby całkowite

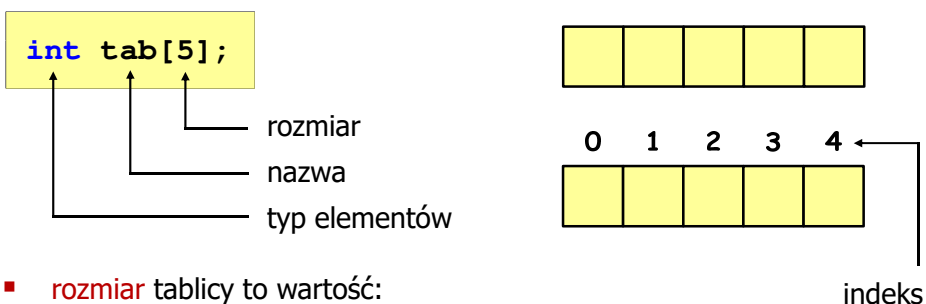
3.1	0.2	2.3	-1.3	1.5	1.1	-4.0
-----	-----	-----	------	-----	-----	------

- liczby rzeczywiste

a	Z	x	&	M	+
---	---	---	---	---	---

- znaki

Język C - deklaracja tablicy jednowymiarowej



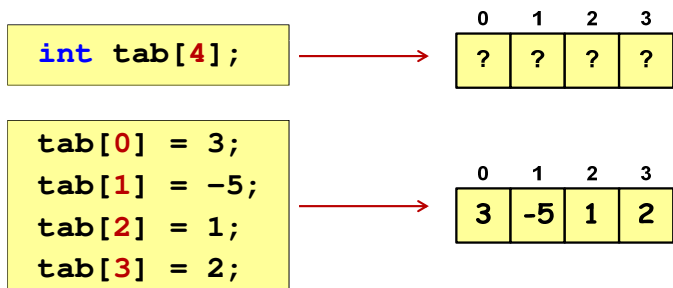
- rozmiar tablicy to wartość:
 - całkowita, dodatnia
 - znana na etapie kompilacji programu (stała liczbowa: `5`, `#define N 5`, `const int n = 5;`)

```
int tab[5];
```

```
int tab[N];
```

```
int tab[n];
```

Język C - odwołania do elementów tablicy



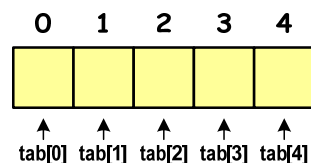
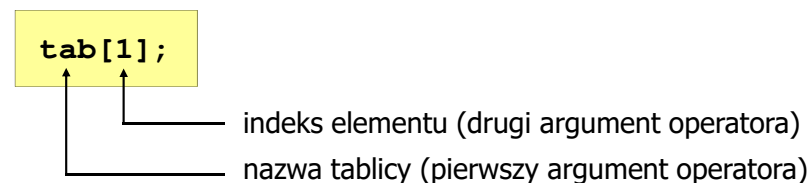
- Każdy element tablicy traktowany jest jak zmienna typu `int`

```
printf("%d", tab[0]);
```

```
scanf("%d", &tab[1]);
```

Język C - odwołania do elementów tablicy

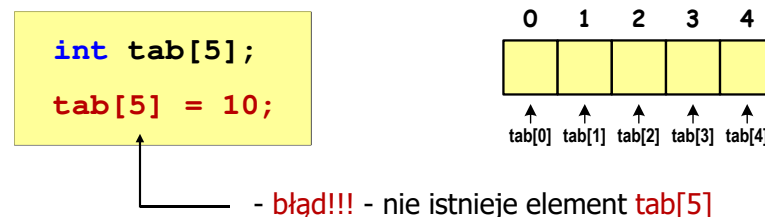
`[]` - dwuargumentowy operator indeksowania



- indeks:
 - stała liczbowa, np. `0`, `1`, `10`
 - nazwa zmiennej, np. `i`, `idx`
 - wyrażenie, np. `i*j+5`

Język C - odwołania do elementów tablicy

- Przy odwołaniach do elementów tablicy kompilator nie sprawdza poprawności indeksów



- Kompilator nie zasygnalizuje błędu
- Program wykona operację
- Środowisko programistyczne może zasygnalizować problem

Język C - inicjalizacja tablicy jednowymiarowej

```
int tab[5] = {1,2,3,4,5};
```

0	1	2	3	4
1	2	3	4	5

```
int tab[5] = {1,2,3};
```

0	1	2	3	4
1	2	3	0	0

```
int tab[5] = {1,2,3,4,5,6};
```

- błąd kompilacji

```
int tab[] = {1,2,3,4,5};
```

0	1	2	3	4
1	2	3	4	5

Język C - odwołania do elementów tablicy

- Zapisanie wartości **1** do wszystkich elementów tablicy

```
int tab[5];
```

```
tab[0] = 1;
```

```
tab[1] = 1;
```

```
tab[2] = 1;
```

```
tab[3] = 1;
```

```
tab[4] = 1;
```

0	1	2	3	4
1	1	1	1	1

```
int tab[5], i;
```

```
for (i=0; i<5; i++)
```

```
    tab[i] = 1;
```

Przykład: operacje na dużej ilości danych

```
#include <stdio.h>
```

```
int main(void)
```

```
{
```

```
    double U[5] = { 5.0, 10.0, 15.0, 20.0, 25.0 };
```

```
    double I[5] = { 0.16, 0.21, 0.27, 0.33, 0.36 };
```

```
    double R[5];
```

```
    int i;
```

```
    for (i=0; i<5; i++)
        R[i] = U[i]/I[i];
```

```
    for (i=0; i<5; i++)
        printf("R%d = %f\n", i+1, R[i]);
```

```
    return 0;
```

```
}
```

```
R1 = 31.250000
R2 = 47.619048
R3 = 55.555556
R4 = 60.606061
R5 = 69.444444
```

	0	1	2	3	4
U	5.0	10.0	15.0	20.0	25.0
I	0.16	0.21	0.27	0.33	0.36
R	31.25	47.62	55.56	60.61	69.44

Język C - generator liczb pseudolosowych

- `rand()` - zwraca liczbę pseudolosową - zakres: **0 ... RAND_MAX** (0 ... 32767)
- `srand()` - inicjalizuje generator liczb pseudolosowych
- Plik nagłówkowy: `stdlib.h` (`time.h`)

```
int x, y, z;
```

```
srand((unsigned int) time(NULL));
```

```
x = rand(); // zakres <0,32767>
```

```
y = rand() % 100; // zakres <0,99>
```

```
z = rand() % (b-a+1)-a; // zakres <a,b>
```

Język C - operacje na wektorze

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <time.h>
```

```
#define N 10
```

```
int main(void)
```

```
{
```

```
    int tab[N], i;
```

```
    /* generowanie elementów tablicy */
```

```
    srand((unsigned int) time(NULL));
```

```
    for (i=0; i<N; i++)
        tab[i] = rand() % 20;
```

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	12	14	9	6	11	6	18	9	10

Język C - operacje na wektorze

```
/* wyświetlenie elementów tablicy */
```

```
printf("Elementy tablicy:\n");
for (i=0; i<N; i++)
    printf("%d ", tab[i]);
printf("\n");
```

Elementy tablicy:

11 12 14 9 6 11 6 18 9 10

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	12	14	9	6	11	6	18	9	10

N = 10

Język C - operacje na wektorze

```
/* wyświetlenie elementów w odwrotnej kolejności */
```

```
printf("Elementy w odwrotnej kolejności:\n");
for (i=N-1; i>=0; i--)
    printf("%d ", tab[i]);
printf("\n");
```

Elementy w odwrotnej kolejności:
10 9 18 6 11 6 9 14 12 11

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	12	14	9	6	11	6	18	9	10

N = 10

Język C - operacje na wektorze

```
/* wyszukanie elementu o najmniejszej wartości */
```

```
int min;

min = tab[0];
for (i=1; i<N; i++)
    if (tab[i]<min)
        min = tab[i];
printf("Wartosc elementu najmniejszego: %d\n", min);
```

Wartosc elementu najmniejszego: 6

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	12	14	9	6	11	6	18	9	10

N = 10

Język C - operacje na wektorze

```
/* indeksy elementów o najmniejszej wartości */  
  
printf("Indeksy elementu najmniejszego: ");  
for (i=0; i<N; i++)  
    if (tab[i]==min)  
        printf("%d ",i);  
printf("\n");
```

Indeksy elementu najmniejszego: 4 6

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	12	14	9	6	11	6	18	9	10

N = 10

Język C - operacje na wektorze

```
/* suma i średnia arytmetyczna elementów tablicy */  
  
int suma = 0;  
float srednia;  
  
for (i=0; i<N; i++)  
    suma = suma + tab[i];  
srednia = (float) suma/N;  
printf("Suma: %d, srednia: %g\n", suma, srednia);
```

Suma: 106, srednia: 10.6

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	12	14	9	6	11	6	18	9	10

N = 10

Język C - operacje na wektorze

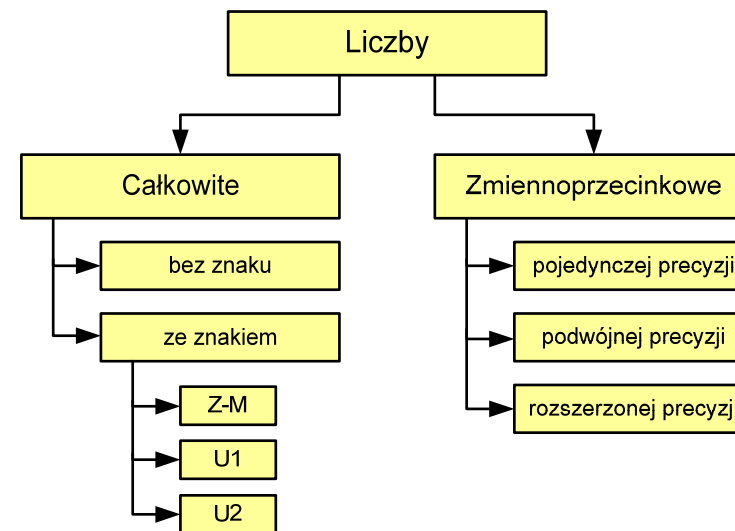
```
/* liczba parzystych elementów tablicy */  
  
int ile = 0;  
  
for (i=0; i<N; i++)  
    if (tab[i]%2==0)  
        ile++;  
printf("Liczba parzystych elementow: %d\n",ile);
```

Liczba parzystych elementow: 6

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	12	14	9	6	11	6	18	9	10

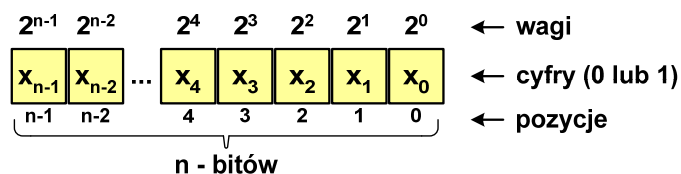
N = 10

Reprezentacja liczb w systemach komputerowych



Liczby całkowite bez znaku

- Zapis liczby w systemie dwójkowym:



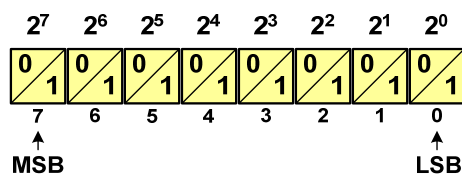
- Używając **n-bitów** można zapisać liczbę z zakresu:

$X_{(2)} = \langle 0, 2^n - 1 \rangle$	8-bitów	0 ... 255
	16-bitów	0 ... 65 535
	32-bitów	0 ... 4 294 967 295
	64-bitów	0 ... 18 446 744 073 709 551 615

18 trylionów 446 miliardów 744 biliony 73 miliardy 709 milionów 551 tysięcy 615

Liczby całkowite bez znaku w języku C

- Typ **unsigned char** (1 bajt):



- MSB (Most Significant Bit) - najbardziej znaczący bit, najstarszy bit, największa waga
- LSB (Least Significant Bit) - najmniej znaczący bit, najmłodszy bit, najmniejsza waga

- Zakres wartości:

- dolna granica: $0000\ 0000_{(2)} = 00_{(16)} = 0_{(10)}$
- górna granica: $1111\ 1111_{(2)} = FF_{(16)} = 255_{(10)}$

Liczby całkowite bez znaku w języku C

- Typy zmiennych całkowitych bez znaku stosowane w języku C:

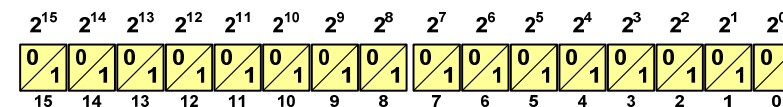
Nazwa typu	Rożmiar (bajty)	Zakres wartości
unsigned char	1 bajt	0 ... 255
unsigned short int	2 bajty	0 ... 65 535
unsigned int	4 bajty	0 ... 4 294 967 295
unsigned long int	4 bajty	0 ... 4 294 967 295
unsigned long long int	8 bajtów	0 ... 18 446 744 073 709 551 615

- W nazwach typów **short** i **long** można pominąć słowo **int**:

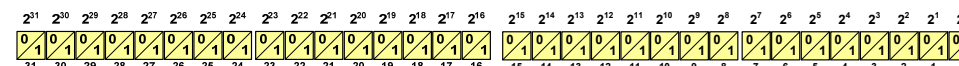
unsigned short int	→	unsigned short
unsigned long int	→	unsigned long
unsigned long long int	→	unsigned long long

Liczby całkowite bez znaku w języku C

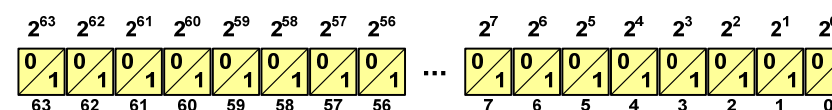
- Typ **unsigned short int** (2 bajty):



- Typy **unsigned int** (4 bajty) i **unsigned long int** (4 bajty):



- Typ **unsigned long long int** (8 bajtów):



Liczby całkowite bez znaku w języku C

```
unsigned short int:    65535 0 1
unsigned int:         4294967295 0 1
unsigned long int:    4294967295 0 1
unsigned long long int: 18446744073709551615 0 1
```

```
#include <stdio.h>

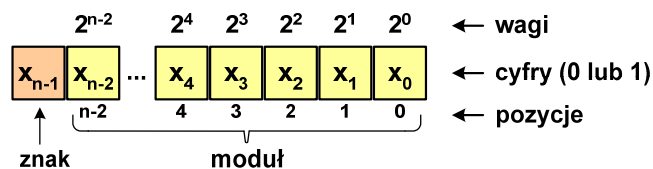
int main() /* przepełnienie zmiennej, ang. integer overflow */
{
    unsigned short int    usi = 65535;
    unsigned int          ui = 4294967295;
    unsigned long int     uli = 4294967295;
    unsigned long long int ulli = 18446744073709551615;

    printf("unsigned short int:    %hu %hu %hu\n", usi, usi+1, usi+2);
    printf("unsigned int:         %u %u %u\n", ui, ui+1, ui+2);
    printf("unsigned long int:    %lu %lu %lu\n", uli, uli+1, uli+2);
    printf("unsigned long long int: %llu %llu %llu\n",
           ulli, ulli+1, ulli+2);

    return 0;
}
```

Liczby całkowite ze znakiem - kod znak-moduł

- Inne nazwy: **ZM, Z-M, SM (Signed Magnitude), S+M**
- Najstarszy bit jest bitem znaku liczby: 0 - dodatnia, 1 - ujemna
- Pozostałe bity mają takie same znaczenie jak w **NKB**



- Wartość liczby:

$$X_{(10)} = \underbrace{(x_0 \cdot 2^0 + x_1 \cdot 2^1 + x_2 \cdot 2^2 + \dots + x_{n-2} \cdot 2^{n-2})}_{\text{moduł}} \cdot \underbrace{(-1)^{x_{n-1}}}_{\text{znak}} = (-1)^{x_{n-1}} \cdot \sum_{i=0}^{n-2} x_i \cdot 2^i$$

Liczby całkowite bez znaku w języku C

```
unsigned short int:    1 0 65535
unsigned int:         1 0 4294967295
unsigned long int:    1 0 4294967295
unsigned long long int: 1 0 18446744073709551615
```

```
#include <stdio.h>

int main() /* przepełnienie zmiennej, ang. integer overflow */
{
    unsigned short int    usi = 1;
    unsigned int          ui = 1;
    unsigned long int     uli = 1;
    unsigned long long int ulli = 1;

    printf("unsigned short int:    %hu %hu %hu\n", usi, usi-1, usi-2);
    printf("unsigned int:         %u %u %u\n", ui, ui-1, ui-2);
    printf("unsigned long int:    %lu %lu %lu\n", uli, uli-1, uli-2);
    printf("unsigned long long int: %llu %llu %llu\n",
           ulli, ulli-1, ulli-2);

    return 0;
}
```

Liczby całkowite ze znakiem - kod znak-moduł

- Liczby **4-bitowe** (1 bit - znak, 3 bity - moduł) w kodzie **Z-M**:

Z-M	dziesiętnie	Z-M	dziesiętnie
0000	+0	1000	-0
0001	1	1001	-1
0010	2	1010	-2
0011	3	1011	-3
0100	4	1100	-4
0101	5	1101	-5
0110	6	1110	-6
0111	7	1111	-7

- dwie reprezentacje zera

+ 0 (0000_{ZM})

- 0 (1000_{ZM})

- Zakres liczb dla **n-bitów**:

$$X_{(10)} = \langle -2^{n-1} + 1, 2^{n-1} - 1 \rangle$$

dla 8 bitów : $\langle -127 \dots 127 \rangle$

dla 16 bitów : $\langle -32767 \dots 32767 \rangle$

Liczby całkowite ze znakiem - kod znak-moduł

- Zamiana liczby dziesiętnej na kod **Z-M**:

- liczba dodatnia

$$93_{(10)} = ?_{(ZM)}$$

- zamieniamy liczbę na NKB

$$93_{(10)} = 1011101_{(NKB)}$$

- Dodajemy bit znaku

$$93_{(10)} = \mathbf{0}1011101_{(ZM)}$$

- liczba ujemna

$$-93_{(10)} = ?_{(ZM)}$$

- zamieniamy **moduł** liczby na NKB

$$|-93_{(10)}| = 93_{(10)} = 1011101_{(NKB)}$$

- Dodajemy bit znaku

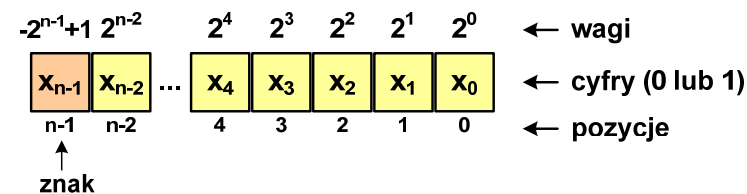
$$-93_{(10)} = \mathbf{1}1011101_{(ZM)}$$

Liczby całkowite ze znakiem - kod U1

- Inne nazwy: **U1, ZU1, uzupełnień do jedności**

- Najstarszy bit jest bitem znaku liczby: 0 - dodatnia, 1 - ujemna

- Wszystkie bity liczby posiadają takie same wagi jak w NKB, oprócz pierwszego bitu, który ma wagę $-2^{n-1} + 1$



- Wartość liczby:

$$X_{(10)} = x_0 \cdot 2^0 + x_1 \cdot 2^1 + x_2 \cdot 2^2 + \dots + x_{n-2} \cdot 2^{n-2} + x_{n-1} \cdot (-2^{n-1} + 1)$$

Liczby całkowite ze znakiem - kod U1

- Liczby **4-bitowe** (1 bit - znak, 3 bity - moduł) w kodzie **U1**:

U1	dziesiętnie	U1	dziesiętnie
0000	+0	1111	-0
0001	1	1110	-1
0010	2	1101	-2
0011	3	1100	-3
0100	4	1011	-4
0101	5	1010	-5
0110	6	1001	-6
0111	7	1000	-7

- liczby dodatnie zapisywane są tak samo jak w NKB

- liczby ujemne otrzymywane są poprzez bitową negację

- dwie reprezentacje zera

- Zakres liczb dla **n-bitów**:

$$X_{(10)} = \langle -2^{n-1} + 1, 2^{n-1} - 1 \rangle$$

dla 8 bitów: $\langle -127 \dots 127 \rangle$

dla 16 bitów: $\langle -32767 \dots 32767 \rangle$

Liczby całkowite ze znakiem - kod U1

- Zamiana liczby dziesiętnej na kod **U1**:

- liczba dodatnia

$$93_{(10)} = ?_{(U1)}$$

- zamieniamy liczbę na NKB

$$93_{(10)} = 1011101_{(NKB)}$$

- Dodajemy bit znaku: 0

$$93_{(10)} = \mathbf{0}1011101_{(U1)}$$

- liczba ujemna

$$-93_{(10)} = ?_{(U1)}$$

- zamieniamy **moduł** liczby na U1

$$|-93_{(10)}| = 93_{(10)} = 01011101_{(U1)}$$

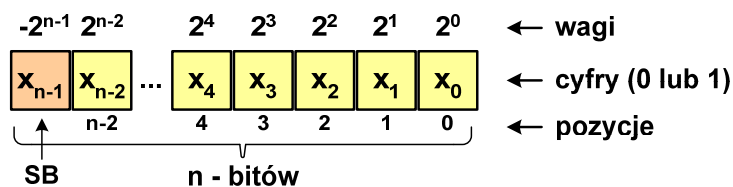
- negujemy wszystkie bity

$$-93_{(10)} = 10100010_{(U1)}$$

bit znaku

Liczby całkowite ze znakiem - kod U2

- Inne nazwy: **ZU2**, uzupełnień do dwóch, two's complement
- Najstarszy bit jest bitem znaku liczby: 0 - dodatnia, 1 - ujemna



- Wartość liczby:

$$X_{(10)} = x_0 \cdot 2^0 + x_1 \cdot 2^1 + x_2 \cdot 2^2 + \dots + x_{n-2} \cdot 2^{n-2} + x_{n-1} \cdot (-2^{n-1})$$
- Kod **U2** jest obecnie powszechnie stosowany w informatyce

Liczby całkowite ze znakiem - kod U2

- Liczby **4-bitowe** (1 bit - znak, 3 bity - moduł) w kodzie **U2**:

U2	dziesiętnie	U2	dziesiętnie
0000	0	1111	-1
0001	1	1110	-2
0010	2	1101	-3
0011	3	1100	-4
0100	4	1011	-5
0101	5	1010	-6
0110	6	1001	-7
0111	7	1000	-8

- brak podwójnej reprezentacji zera
- liczb ujemnych jest o jeden więcej niż dodatnich
- 00...000** zawsze oznacza $0_{(10)}$
11...111 zawsze oznacza $-1_{(10)}$

- Zakres liczb dla **n-bitów**:

$$X_{(10)} = \langle -2^{n-1}, 2^{n-1} - 1 \rangle$$

dla 8 bitów : $\langle -128 \dots 127 \rangle$

dla 16 bitów : $\langle -32768 \dots 32767 \rangle$

Liczby całkowite ze znakiem - kod U2

- Zamiana liczby dziesiętnej na kod **U2**:

- liczba dodatnia

$$75_{(10)} = ?_{(U2)}$$

- zamieniamy liczbę na NKB

$$75_{(10)} = 1001011_{(NKB)}$$

- Dodajemy bit znaku: 0

$$75_{(10)} = 01001011_{(U2)}$$

- liczba ujemna

$$-75_{(10)} = ?_{(U2)}$$

- zamieniamy **moduł** liczby na U2

$$|-75_{(10)}| = 75_{(10)} = 01001011_{(U2)}$$

- negujemy wszystkie bity i dodajemy 1

$$\begin{array}{r} 01001011 \\ \text{negacja: } 10110100 \\ +1: \quad \quad 1 \\ \hline -75_{(10)} = 10110101_{(U2)} \end{array}$$

Liczby całkowite ze znakiem - kod U2 w języku C

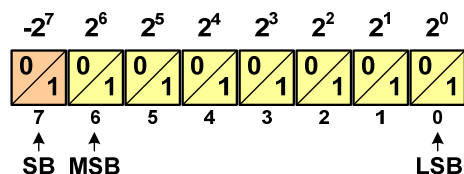
- Typy zmiennych całkowitych ze znakiem stosowane w języku C:

Nazwa typu	Rozmiar (bajty)	Zakres wartości
char	1 bajt	-128 ... 127
short int	2 bajty	-32 768 ... 32 767
int	4 bajty	-2 147 483 648 ... 2 147 483 647
long int	4 bajty	-2 147 483 648 ... 2 147 483 647
long long int	8 bajtów	-9 223 372 036 854 775 808 ... 9 223 372 036 854 775 807

- Przed nazwą każdego z powyższych typów można dodać **signed**
signed char, **signed short int**, **signed int** ...
- W nazwach typów **short** i **long** można pominąć słowo **int**:
short int → short, **long int** → long, **long long int** → long long

Liczby całkowite ze znakiem - kod U2 w języku C

- Typ **char / signed char** (1 bajt):



- Zakres wartości:

- dolna granica: $1000\ 0000_{(2)} = -128_{(10)}$
- górna granica: $0111\ 1111_{(2)} = 127_{(10)}$
- inne wartości: $1111\ 1111_{(2)} = -1_{(10)}$
 $0000\ 0000_{(2)} = 0_{(10)}$

Liczby całkowite ze znakiem - kod U2 w języku C

```
short int:      32767 -32768 -32767
int:           2147483647 -2147483648 -2147483647
long int:      2147483647 -2147483648 -2147483647
long long int: 9223372036854775807 -9223372036854775808
```

```
#include <stdio.h>

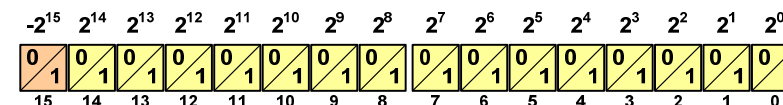
int main() /* przepełnienie zmiennej, ang. integer overflow */
{
    short int    si = 32767;
    int          i  = 2147483647;
    long int     li = 2147483647;
    long long int lli = 9223372036854775807;

    printf("short int:    %hd %hd %hd\n", si, si+1, si+2);
    printf("int:         %d %d %d\n", i, i+1, i+2);
    printf("long int:     %ld %ld %ld\n", li, li+1, li+2);
    printf("long long int: %lld %lld\n", lli, lli+1);

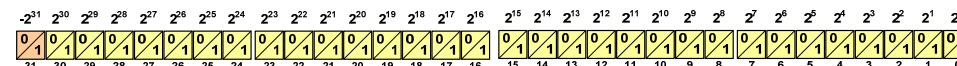
    return 0;
}
```

Liczby całkowite bez znaku w języku C

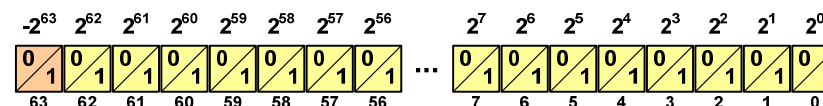
- Typ **short / signed short int** (2 bajty):



- Typy **int / signed int** (4 bajty) i **long / signed long int** (4 bajty):



- Typ **long long int / signed long long int** (8 bajtów):



Zapis zmiennoprzecinkowy liczby rzeczywistej

- Zapis bardzo dużych lub małych liczb wymaga dużej liczby cyfr
- Znacznie prostsze jest przedstawienie liczb w postaci **zmiennoprzecinkowej** (ang. **floating point numbers**)
 - $12\ 000\ 000\ 000\ 000 = 1,2 \cdot 10^{13}$
 - $0,000\ 000\ 000\ 001 = 1,0 \cdot 10^{-12}$
- Zapis liczby zmiennoprzecinkowej ma postać:

$$L = M \cdot B^E$$

gdzie:

- L - wartość liczby
- M - mantysa
- B - podstawa systemu
- E - wykładnik, cecha

- notacja naukowa: $1,2e13$ $1,2e+13$ $1,2E13$ $1,2E+13$
- postać wykładnicza: $1,2 \cdot 10^{13}$

Zapis zmiennoprzecinkowy liczby rzeczywistej

$$2,43 \cdot 10^3_{(10)} = 2,43 \cdot 1000 = 2430_{(10)} \quad 6,59 \cdot 10^{-2}_{(10)} = 6,59 \cdot 0,01 = 0,0659_{(10)}$$

$$1,011 \cdot 10^{101}_{(2)} = ?_{(10)}$$

$$M = 1,011_{(2)} = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} = 1,375_{(10)}$$

$$B = 10_{(2)} = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 = 2_{(10)}$$

$$E = 101_{(2)} = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 = 1 + 4 = 5_{(10)}$$

$$1,011 \cdot 10^{101}_{(2)} = 1,375 \cdot 2^5 = 1,375 \cdot 32 = 44_{(10)}$$

$$3,121 \cdot 10^{32}_{(4)} = ?_{(10)}$$

$$M = 3,121_{(4)} = 3 \cdot 4^0 + 1 \cdot 4^{-1} + 2 \cdot 4^{-2} + 1 \cdot 4^{-3} = 3,390625_{(10)}$$

$$B = 10_{(4)} = 0 \cdot 4^0 + 1 \cdot 4^1 = 4_{(10)}$$

$$E = 32_{(4)} = 2 \cdot 4^0 + 3 \cdot 4^1 = 2 + 12 = 14_{(10)}$$

$$3,121 \cdot 10^{32}_{(4)} = 3,390625 \cdot 4^{14} = 910\,163\,968_{(10)}$$

Postać znormalizowana zapisu liczby

- Położenie przecinka w mantysie nie jest ustalone i może się zmieniać
- Poniższe zapisy oznaczają tę samą liczbę (system dziesiętny)

$$243 \cdot 10^1 = 24,3 \cdot 10^2 = 2,43 \cdot 10^3 = 0,243 \cdot 10^4$$

- Dla ujednoczenia zapisu i usunięcia wielokrotnych reprezentacji tej samej liczby, przyjęto tzw. **postać znormalizowaną** zapisu liczby
- W postaci znormalizowanej mantysa spełnia nierówność:

$$B > |M| \geq 1$$

Przykład:

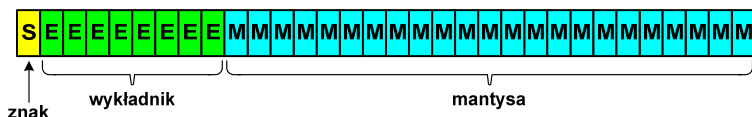
$2,43 \cdot 10^3$ - to jest postać znormalizowana, gdyż: $10 > |2,43| \geq 1$

$0,243 \cdot 10^4$ - to nie jest postać znormalizowana

$24,3 \cdot 10^2$ - to nie jest postać znormalizowana

Liczby zmiennoprzecinkowe w systemie binarnym

- Liczba bitów przeznaczonych na mantysę i wykładnik jest ograniczona



- Wartość liczby L :

$$L = (-1)^S \cdot M \cdot B^E$$

gdzie:

- S - znak liczby (ang. sign), przyjmuje wartość 0 lub 1
- M - znormalizowana mantysa (ang. mantissa), liczba ułamkowa
- B - podstawa systemu liczbowego (ang. base)
- E - wykładnik (ang. exponent), cecha, liczba całkowita

- W systemie binarnym podstawa systemu jest stała: $B = 2$

$$L = (-1)^S \cdot M \cdot 2^E$$

Przesunięcie wykładnika

- Wykładnik zapisywany jest z przesunięciem (ang. **bias**)

$$L = (-1)^S \cdot M \cdot 2^{E-\text{BIAS}}$$

gdzie:

- L - wartość liczby
- S - znak liczby
- M - mantysa
- E - wykładnik
- BIAS - przesunięcie (nadmiar)

- Typowe wartości przesunięcia (nadmiaru) wynoszą:

- formatu 32-bitowy: $2^7 - 1 = 127_{(10)} = 7F_{(16)}$

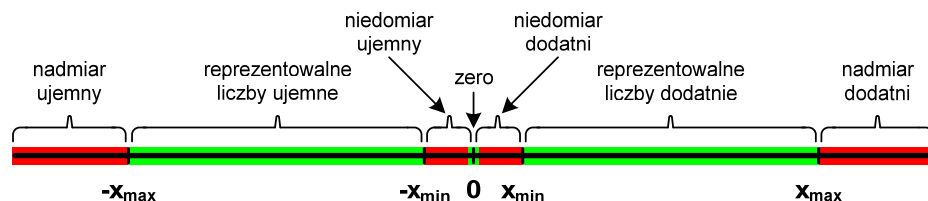
- formatu 64-bitowy: $2^{10} - 1 = 1023_{(10)} = 3FF_{(16)}$

- formatu 80-bitowy: $2^{14} - 1 = 16383_{(10)} = 3FFF_{(16)}$

Zakres liczb zmiennoprzecinkowych

- Zakres liczb w zapisie zmiennoprzecinkowym:

$$\langle -x_{\max}, -x_{\min} \rangle \cup \{0\} \cup \langle x_{\min}, x_{\max} \rangle$$



- Największa i najmniejsza wartość liczby w danej reprezentacji:

$$x_{\min} = M_{\min} \cdot B^{E_{\min}}$$

$$x_{\max} = M_{\max} \cdot B^{E_{\max}}$$

Standard IEEE 754

- W przypadku liczb:

- pojedynczej rozszerzonej precyzji (ang. Single Precision)
- podwójnej rozszerzonej precyzji (ang. Double Precision)

standard podaje jedynie minimalną liczbę bitów pozostawiając szczegóły implementacji producentom procesorów i kompilatorów

- Bardzo popularny jest 80-bitowy format **podwójnej rozszerzonej precyzji** (Extended Precision) wprowadzony przez firmę Intel

- W 80-bitowym formacie Intela:

- długość słowa: 80 bitów
- znak: 1 bit
- wykładnik: 15 bitów (zakres: $2^{\pm 16383} \approx 10^{\pm 4932}$)
- mantysa: 63 bity (cyfry znaczące: 19)

Standard IEEE 754

- IEEE Std. 754-2008** - IEEE Standard for Floating-Point Arithmetic
- Standard definiuje następujące klasy liczb zmiennoprzecinkowych:

Precyzja	Długość słowa [bity]	Znak [bity]	Wykładnik		Mantysa	
			Długość [bity]	Zakres	Długość [bity]	Cyfry znaczące
Pojedyncza (Single Precision, binary32)	32	1	8	$2^{\pm 127} \approx 10^{\pm 38}$	23	7
Pojedyncza rozszerzona (Single Extended)	≥ 43	1	≥ 11	$\geq 2^{\pm 1023} \approx 10^{\pm 308}$	≥ 31	≥ 10
Podwójna (Double Precision, binary64)	64	1	11	$2^{\pm 1023} \approx 10^{\pm 308}$	52	16
Podwójna rozszerzona (Double Extended)	≥ 79	1	≥ 15	$\geq 2^{\pm 16383} \approx 10^{\pm 4932}$	≥ 63	≥ 19

źródło: Gryś S.: „Arytmetyka komputerów w praktyce”. PWN, Warszawa, 2007 (str. 116).

Standard IEEE 754

- Standard IEEE 754 definiuje także dziesiętne typy zmiennoprzecinkowe (operujące na cyfrach dziesiętnych):

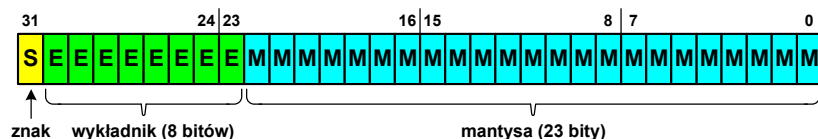
- decimal32** (32 bity, 7 cyfr dziesiętnych)
- decimal64** (64 bity, 16 cyfr dziesiętnych)
- decimal128** (128 bitów, 34 cyfry dziesiętnych)

- Standard IEEE 754 definiuje także:

- sposób reprezentacji specjalnych wartości, np. nieskończoności, zera
- sposób wykonywania działań na liczbach zmiennoprzecinkowych
- sposób zaokrąglania liczb

Standard IEEE 754 - liczby 32-bitowe

- Liczba pojedynczej precyzji przechowywana jest na 32 bitach:



- Pierwszy bit w zapisie (bit nr 31) jest **bitem znaku** (0 - liczba dodatnia, 1 - liczba ujemna)
- Wykładnik** zapisywany jest na **8 bitach** (bity nr 30-23) z nadmiarem o wartości 127
- Wykładnik** może przyjmować wartości od -127 (wszystkie bity wyzerowane) do 128 (wszystkie bity ustawione na 1)

Standard IEEE 754 - liczby 32-bitowe

- Przykład:

- obliczmy wartość dziesiętną liczby zmiennoprzecinkowej

$$01000010110010000000000000000000_{(IEEE754)} = ?_{(10)}$$

- dzielimy liczbę na części

$$\begin{array}{c} 0 \quad \underbrace{10000101} \quad \underbrace{100100000000000000000000} \\ \text{S-bit znaku} \quad \text{E-wykładnik} \quad \text{M-mantysa (tylko część ułamkowa)} \end{array}$$

- określamy **znak liczby**

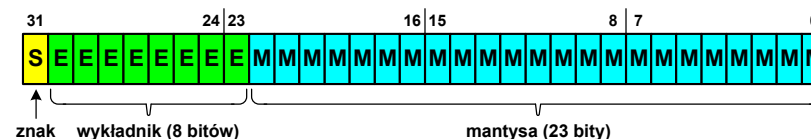
$$S = 0 \quad \text{– liczba dodatnia}$$

- obliczamy **wykładnik** (nadmiar: 127)

$$10000101_{(2)} = 128 + 4 + 1 = 133 \Rightarrow E = 133 - \underbrace{127}_{\text{nadmiar}} = 6_{(10)}$$

Standard IEEE 754 - liczby 32-bitowe

- Liczba pojedynczej precyzji przechowywana jest na 32 bitach:



- Mantysa** w większości przypadków jest znormalizowana
- Wartość mantysy zawiera się pomiędzy **1** a **2**, a zatem w zapisie liczby pierwszy bit jest zawsze równy 1
- Powyzszy bit nie jest zapamiętywany, natomiast jest automatycznie uwzględniany podczas wykonywania obliczeń
- Dzięki pominięciu tego bitu zyskujemy dodatkowy bit mantysy (zamiast 23 bitów mamy 24 bity)

Standard IEEE 754 - liczby 32-bitowe

- Przykład (cd.):

- wyznaczamy **mantysę** dopisując na początku **1**, (całość całkowita)

$$\begin{aligned} M &= 1,100100000000000000000000 = \\ &= 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-4} = 1 + 0,5 + 0,0625 = 1,5625_{(10)} \end{aligned}$$

- wzór na wartość dziesiętną liczby zmiennoprzecinkowej:

$$L = (-1)^S \cdot M \cdot 2^E$$

- podstawiając otrzymujemy:

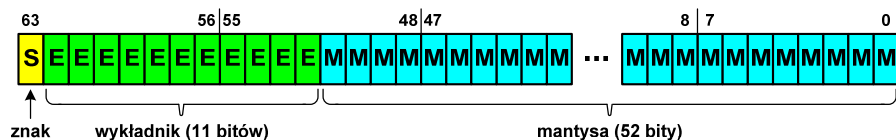
$$S = 0, \quad E = 6_{(10)}, \quad M = 1,5625_{(10)}$$

$$L = (-1)^0 \cdot 1,5625 \cdot 2^6 = 100_{(10)}$$

$$01000010110010000000000000000000_{(IEEE754)} = 100_{(10)}$$

Standard IEEE 754 - liczby 64-bitowe

- Liczba podwójnej precyzji przechowywana jest na 64 bitach:



- Pierwszy bit w zapisie (bit nr 63) jest **bitem znaku** (0 - liczba dodatnia, 1 - liczba ujemna)
- **Wykładnik** zapisywany jest na **11 bitach** (bity nr 62-52) z nadmiarem o wartości 1023
- **Wykładnik** może przyjmować wartości od -1023 (wszystkie bity wyzerowane) do 1024 (wszystkie bity ustawione na 1)
- **Mantysa** zapisywana jest na 52 bitach (pierwszy bit mantysy, zawsze równy 1, nie jest zapamiętywany)

Standard IEEE 754 - precyzja liczb

- **Precyzja** - liczba zapamiętywanych cyfr znaczących w systemie (10)

4,86452137846 → **4,864521** - 7 cyfr znaczących

- Precyzja liczby zależy od **liczby bitów mantysy**
- Liczba bitów potrzebnych do zakodowania 1 cyfry dziesiętnej:

$$10^1 = 2^n \rightarrow n = \log_2(10) \approx 3,321928$$

- Liczba cyfr dziesiętnych (**d**) możliwa do zakodowania na **m** bitach:

$\log_2(10)$ bitów - 1 cyfra dziesiętna
m bitów - d cyfr dziesiętnych

$$d = \frac{m}{\log_2(10)}$$

Standard IEEE 754 - zakres liczb

- **Pojedyncza precyzja:**
 - największa wartość: $\approx 3,4 \cdot 10^{38}$
 - najmniejsza wartość: $\approx 1,4 \cdot 10^{-45}$
 - zakres liczb: $\langle -3,4 \cdot 10^{38} \dots -1,4 \cdot 10^{-45} \rangle \cup \{0\} \cup \langle 1,4 \cdot 10^{-45} \dots 3,4 \cdot 10^{38} \rangle$
- **Podwójna precyzja:**
 - największa wartość: $\approx 1,8 \cdot 10^{308}$
 - najmniejsza wartość: $\approx 4,9 \cdot 10^{-324}$
 - zakres liczb: $\langle -1,8 \cdot 10^{308} \dots -4,9 \cdot 10^{-324} \rangle \cup \{0\} \cup \langle 4,9 \cdot 10^{-324} \dots 1,8 \cdot 10^{308} \rangle$
- **Podwójna rozszerzona precyzja:**
 - największa wartość: $\approx 1,2 \cdot 10^{4932}$
 - najmniejsza wartość: $\approx 3,6 \cdot 10^{-4951}$
 - zakres liczb: $\langle -1,2 \cdot 10^{4932} \dots -3,6 \cdot 10^{-4951} \rangle \cup \{0\} \cup \langle 3,6 \cdot 10^{-4951} \dots 1,2 \cdot 10^{4932} \rangle$

Standard IEEE 754 - precyzja liczb

- Dla formatu pojedynczej precyzji:

□ mantysa: 23 + 1 = **24 bity** $d = \frac{24}{\log_2(10)} = \frac{24}{3,321928} = 7,2247 \approx 7$

□ cyfry znaczące: **7**

- Dla formatu podwójnej precyzji:

□ mantysa: 52 + 1 = **53 bity** $d = \frac{53}{\log_2(10)} = \frac{53}{3,321928} = 15,9546 \approx 16$

□ cyfry znaczące: **16**

- Dla formatu podwójnej rozszerzonej precyzji:

□ mantysa: 63 + 1 = **64 bity** $d = \frac{64}{\log_2(10)} = \frac{64}{3,321928} = 19,2659 \approx 19$

□ cyfry znaczące: **19**

Standard IEEE 754 - precyzja liczb

```
#include <stdio.h>
```

```
int main()
```

```
{  
    float x;  
    double y;
```

```
    x = 1234567890.0; /* 1.234.567.890 */
```

```
    y = 1234567890.0; /* 1.234.567.890 */
```

```
    printf("float -> %f\n", x);
```

```
    printf("double -> %f\n\n", y);
```

```
    y = 12345678901234567890.0;
```

```
    printf("double -> %f\n", y);
```

```
    return 0;
```

```
}
```

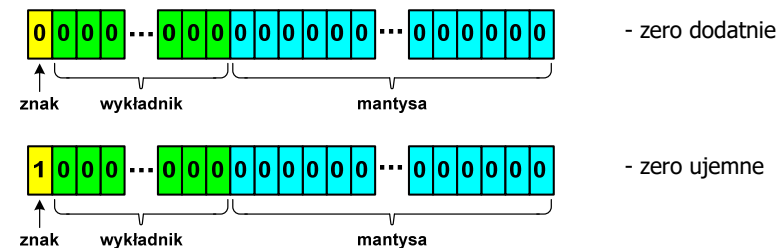
```
float -> 1234567936.000000
```

```
double -> 1234567890.000000
```

```
double -> 12345678901234567000.000000
```

Standard IEEE 754 - wartości specjalne

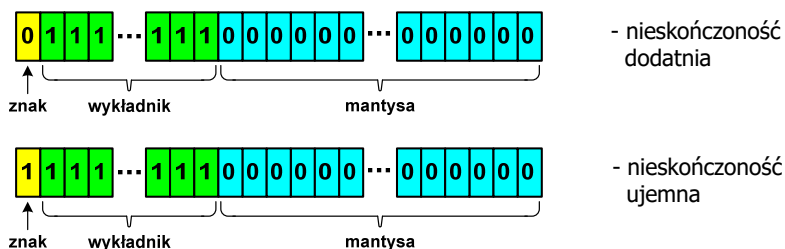
Zero:



- Podczas porównań zero dodatnie i ujemne są traktowane jako równe sobie

Standard IEEE 754 - wartości specjalne

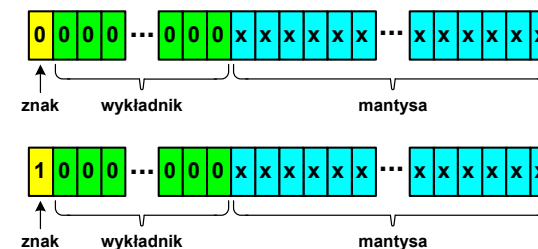
Nieskończoność:



- Nieskończoność występuje w przypadku wystąpienia **nadmiaru** (przepełnienia) oraz przy dzieleniu przez zero

Standard IEEE 754 - wartości specjalne

Liczba zdenormalizowana:

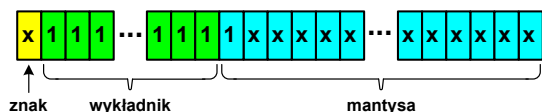


- Pojawia się, gdy występuje **niedomiar** (ang. **underflow**), ale wynik operacji można jeszcze zapisać denormalizując mantysę
- Mantysa nie posiada domyślnej części całkowitej równej **1**, tzn. reprezentuje liczbę o postaci **0,xxx...xxx**, a nie **1,xxx...xxx**

Standard IEEE 754 - wartości specjalne

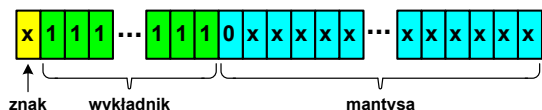
- **Nieliczby - NaN (Not A Number)** - nie reprezentują wartości liczbowej
- Powstają w wyniku wykonania niedozwolonej operacji

- **QNaN (ang. Quiet NaN)** - ciche nie liczby



„przechodzą” przez działania arytmetyczne (brak przzerwania wykonywania programu)

- **SNaN (ang. Signaling NaN)** - sygnalizujące, istotne, głośne nie liczby



zgłoszenie wyjątku (przerwanie wykonywania programu)

Standard IEEE 754 - wartości specjalne

- Standard IEEE 754 definiuje dokładnie wyniki operacji, w których występują specjalne argumenty

Operacja	Wynik
$x / \pm\infty$	0
$\pm\infty \cdot \pm\infty$	$\pm\infty$
$\pm\text{wart_niezer} / 0$	$\pm\infty$
$\infty + \infty$	∞
$\pm 0 / \pm 0$	NaN
$\infty - \infty$	NaN
$\pm\infty / \pm\infty$	NaN
$\pm\infty \cdot 0$	NaN

Język C - operacje z wartościami specjalnymi

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

int main(void)
{
    printf("1.0/0.0 = %f\n", 1.0/0.0);
    printf("-1.0/0.0 = %f\n", -1.0/0.0);
    printf("0.0/0.0 = %f\n", 0.0/0.0);
    printf("sqrt(-1.0) = %f\n", sqrt(-1.0));
    printf("1.0/INF = %f\n", 1.0/(1.0/0.0));
    printf("0*INF = %f\n", 0.0*(1.0/0.0));

    return 0;
}
```

```
1.0/0.0 = 1.#INF00
-1.0/0.0 = -1.#INF00
0.0/0.0 = -1.#IND00
sqrt(-1.0) = -1.#IND00
1.0/INF = 0.000000
0*INF = -1.#IND00
```

Operacja	Wynik
$x / \pm\infty$	0
$\pm\infty \cdot \pm\infty$	$\pm\infty$
$\pm\text{wart_niezer} / 0$	$\pm\infty$
$\infty + \infty$	∞
$\pm 0 / \pm 0$	NaN
$\infty - \infty$	NaN
$\pm\infty / \pm\infty$	NaN
$\pm\infty \cdot 0$	NaN

- Środowisko: Code::Blocks 20.03

Reprezentacja liczb zmiennoprzecinkowych w C

- Typy zmiennoprzecinkowe w języku C:

Nazwa typu	Rozmiar (bajty)	Zakres wartości	Cyfry znaczące
float	4 bajty	$-3,4 \cdot 10^{38} \dots 3,4 \cdot 10^{38}$	7-8
double	8 bajtów	$-1,8 \cdot 10^{308} \dots 1,8 \cdot 10^{308}$	15-16
long double	10 bajtów	$-1,2 \cdot 10^{4932} \dots 1,2 \cdot 10^{4932}$	19-20

- Typ **long double** może mieć także inny rozmiar:

Środowisko	Rozmiar (bajty)
MS Visual C++ 2008 EE	8 bajtów
Borland Turbo C++ Explorer	10 bajtów
Code::Blocks 20.03	16 bajtów
Dev-C++ 5.11	16 bajtów

Reprezentacja liczb zmiennoprzecinkowych w C

```
#include <stdio.h>

int main(void)
{
    float    sf = 0.0f;
    double   sd = 0.0;
    long double slg = 0.0L;

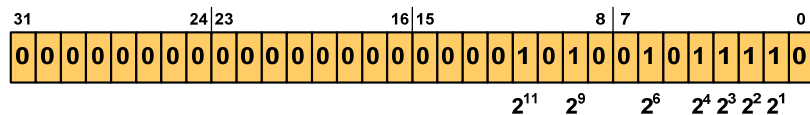
    for (int i=0; i<10000; i++)
    {
        sf = sf + 0.01f;
        sd = sd + 0.01;
        slg = slg + 0.01L;
    }

    printf("float:      %.20f\n", sf);
    printf("double:     %.20f\n", sd);
    printf("long double: %.20Lf\n", slg);

    return 0;
}
```

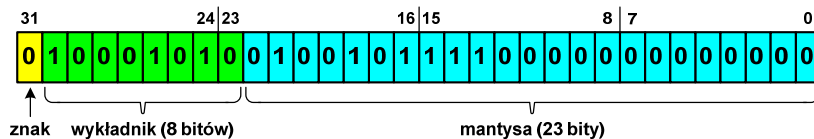
Liczba 2654₍₁₀₎ jako całkowita i rzeczywista w C

- int (4 bajty): 2654₍₁₀₎ = 00 00 0A 5E₍₁₆₎



$$2^{11} + 2^9 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 = 2048 + 512 + 64 + 16 + 8 + 4 + 2 = 2654_{(10)}$$

- float (4 bajty): 2654₍₁₀₎ = 45 25 E0 00_(IEEE 754)



$$+ 138 - 127 = 11_{(10)}$$

$$1.010010111_{(2)} = 1.2958984_{(10)}$$

$$1.2958984 \cdot 2^{11} = 2654_{(10)}$$

Reprezentacja liczb zmiennoprzecinkowych w C

- Microsoft Visual C++ 2008 Express Edition (long double - 8 bajtów)

```
float:      100.00295257568359000000
double:    100.00000000001425000000
long double: 100.00000000001425000000
```

- Borland Turbo C++ Explorer (long double - 10 bajtów)

```
float:      100.00295257568359375000
double:    100.00000000001425349000
long double: 100.0000000000001388000
```

- Code::Blocks 20.03 (long double - 16 bajtów)

```
float:      100.00295257568359000000
double:    100.00000000001425000000
long double: 0.00000000000000000000
```

```
warning: unknown conversion
type character 'L' in format
[-Wformat=]
```

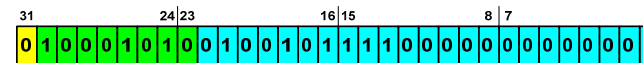
Język C - nieprawidłowy specyfikator formatu

```
int x;

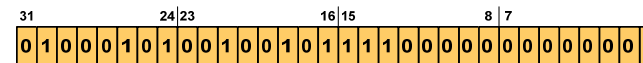
printf("x (%f) = "); scanf("%f", &x);
printf("x (%d) = %d\n", x);
printf("x (%f) = %f\n", x);
printf("x (%e) = %e\n", x);
```

```
x (%f) = 2654
x (%d) = 1160110080
x (%f) = 0.000000
x (%e) = 5.731705e-315
```

- Zgodnie ze standardem języka C wynik jest **niezdefiniowany**
- Zapamiętana wartość:



- Wyświetlona wartość przy wykorzystaniu %d:



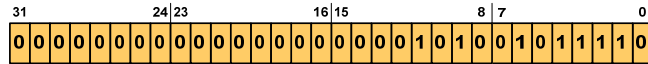
$$2^{30} + 2^{26} + 2^{24} + 2^{21} + 2^{18} + 2^{16} + 2^{15} + 2^{14} + 2^{13} = 1.160.110.080_{(10)}$$

Język C - nieprawidłowy specyfikator formatu

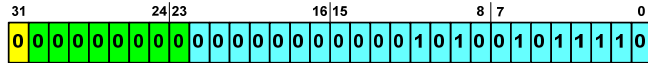
```
float x;  
printf("x (%d) = "); scanf("%d",&x);  
printf("x (%d) = %d\n", x);  
printf("x (%f) = %f\n", x);  
printf("x (%e) = %e\n", x);
```

```
x (%d) = 2654  
x (%d) = 0  
x (%f) = 0.000000  
x (%e) = 3.719046e-042
```

- Zgodnie ze standardem języka C wynik jest **niezdefiniowany**
- Zapamiętana wartość:



- Wyświetlona wartość przy wykorzystaniu %e:



Liczba zdenormalizowana: 3,719046E-42

Koniec wykładu nr 5

Dziękuję za uwagę!