Fundusze Europejskie Wiedza Edukacja Rozwój | Rzeczpospolita Polska | Unia Europejska Europejski Fundusz Społeczny

Wydział Elektryczny
Katedra Elektrotechniki, Energoelektroniki i Elektroenergetyki

Materiały do wykładu z przedmiotu:
Informatyka
Kod: EDS1B1007

WYKŁAD NR 4

Opracował: dr inż. Jarosław Forenc

Białystok 2022

Materiały zostały opracowane w ramach projektu „PB2020 - Zintegrowany Program Rozwoju Politechniki Białostockiej" realizowanego w ramach Działania 3.5 Programu Operacyjnego Wiedza, Edukacja, Rozwój 2014-2020 współfinansowanego ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego.

Plan wykładu nr 4

- Algorytmy komputerowe
  - definicje, sposoby opisu
  - rekurencja
  - złożoność obliczeniowa
  - algorytmy sortowania (proste wstawianie, proste wybieranie, bąbelkowe, szybkie - quick-sort)

Algorytm - definicje

Definicja 1

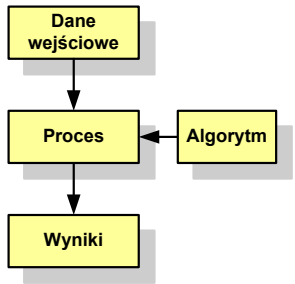
- Skończony, uporządkowany ciąg jasno zdefiniowanych czynności, koniecznych do wykonania pewnego zadania

Definicja 2

- Opis rozwiązania problemu wyrażony za pomocą operacji zrozumiałych i możliwych do zrealizowania przez wykonawcę

Definicja 3

- Ściśle określona procedura obliczeniowa, która dla właściwych danych wejściowych zwraca żądane dane wyjściowe zwane wynikiem działania algorytmu



Definicja 4

- Metoda rozwiązania zadania

Algorytmy

- Słowo „algorytm" pochodzi od nazwiska matematyka perskiego z IX wieku - Muhammada ibn-Musy al-Chuwarizmiego (po łacinie pisanego jako Algorismus)
- Badaniem algorytmów zajmuje się algorytmika
- „Przetłumaczenie" algorytmu na wybrany język programowania:
  - implementacja algorytmu
  - kodowanie algorytmu
- Sposoby opisu algorytmów
  - opis słowny w języku naturalnym lub lista kroków (opis w punktach)
  - schemat blokowy
  - pseudokod (nieformalna odmiana języka programowania)
  - wybrany język programowania

Opis słowny algorytmu

- Podanie kolejnych czynności, które należy wykonać, aby otrzymać oczekiwany efekt końcowy
- Przypomina przepis kulinarny z książki kucharskiej lub instrukcję obsługi urządzenia, np.

Algorytm: Tortilla („Podróże kulinarne" R. Makłowicza)

Dane wejściowe: 0,5 kg ziemniaków, 100 g kiełbasy Chorizo, 8 jajek

Dane wyjściowe: gotowa Tortilla

Opis algorytmu: Ziemniaki obrać i pokroić w plasterki. Kiełbasę pokroić w plasterki. Ziemniaki wrzucić na gorącą oliwę na patelni i przyrumienić z obu stron. Kiełbasę wrzucić na gorącą oliwę na patelni i przyrumienić z obu stron. Ubić jajka i dodać do połączonych ziemniaków i kiełbasy. Dodać sól i pieprz. Usmażyć z obu stron wielki omlet nadziewany chipsami ziemniaczanymi z kiełbaską.

Lista kroków

- Uporządkowany opis wszystkich czynności, jakie należy wykonać podczas realizacji algorytmu
- Krok jest to pojedyncza czynność realizowana w algorytmie
- Kroki w algorytmie są numerowane, operacje wykonywane są zgodnie z rosnącą numeracją kroków
- Jedynym odstępstwem od powyższej reguły są operacje skoku (warunkowe lub bezwarunkowe), w których jawnie określa się numer kolejnego kroku
- Przykład (instrukcja otwierania wózka-specerówki):

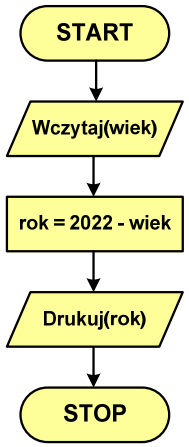
Krok 1: Zwolnij element blokujący wózek

Krok 2: Rozkładaj wózek w kierunku kółek

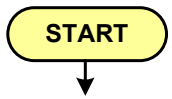
Krok 3: Naciskając nogą dolny element blokujący aż do zatrzaśnięcia, rozłóż wózek do pozycji przewozowej

Schemat blokowy

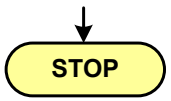
- Zawiera plan algorytmu przedstawiony w postaci graficznej
- Na schemacie umieszczane są bloki oraz linie przepływu (strzałki)
- Blok zawiera informację o wykonywanej operacji
- Linie przepływu (strzałki) określają kolejność wykonywania bloków algorytmu
- Przykład: wyznaczanie roku urodzenia na podstawie wieku (algorytm liniowy)



Schemat blokowy - symbole graficzne

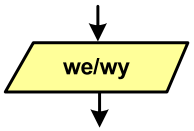


- blok startowy, początek algorytmu
- wskazuje miejsce rozpoczęcia algorytmu
- ma jedno wyjście
- może występować tylko jeden raz

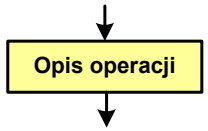


- blok końcowy, koniec algorytmu
- wskazuje miejsce zakończenia algorytmu
- ma jedno wejście
- musi występować przynajmniej jeden raz

Schemat blokowy - symbole graficzne

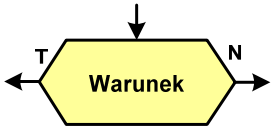


- blok wejścia-wyjścia
- poprzez ten blok wprowadzane są (czytane) dane wejściowe i wyprowadzane (zapisywane) wyniki
- ma jedno wejście i jedno wyjście

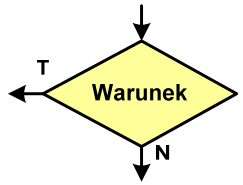


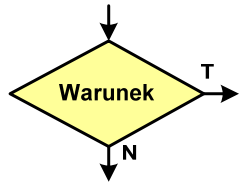
- blok wykonawczy, blok funkcyjny, opis procesu
- zawiera jedno lub kilka poleceń (elementarnych instrukcji) wykonywanych w podanej kolejności
- instrukcją może być np. operacja arytmetyczna, podstawienie
- ma jedno wejście i jedno wyjście

Schemat blokowy - symbole graficzne

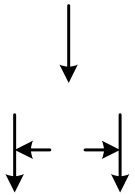


- blok warunkowy (decyzyjny, porównujący)
- wewnątrz bloku umieszcza się warunek logiczny
- na podstawie warunku określana jest tylko jedna droga wyjściowa
- połączenia wychodzące z bloku:
  - T lub TAK - gdy warunek jest prawdziwy
  - N lub NIE - gdy warunek nie jest prawdziwy
- wyjścia mogą być skierowane na boki lub w dół

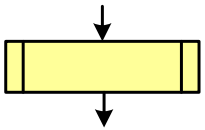




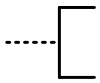
Schemat blokowy - symbole graficzne



- linia przepływu, połączenie, linia
- występuje w postaci linii zakończonej strzałką
- określa kierunek przemieszczania się po schemacie
- linie pochodzące z różnych części algorytmu mogą zbiegać się w jednym miejscu



- podprogram
- wywołanie wcześniej zdefiniowanego fragmentu algorytmu (podprogramu)
- ma jedno wejście i jedno wyjście



- komentarz
- dodanie do schematu dodatkowego opisu

Pseudokod i język programowania

Pseudokod:

- Pseudokod (pseudojęzyk) - uproszczona wersja języka programowania
- Często zawiera zwroty pochodzące z języków programowania
- Zapis w pseudokodzie może być łatwo przetłumaczony na wybrany język programowania

Opis w języku programowania:

- Zapis programu w konkretnym języku programowania
- Stosowane języki: Pascal, C, C++, Matlab, Python
  (kiedyś - Fortran, Basic)

Największy wspólny dzielnik - algorytm Euklidesa

- NWD - największa liczba naturalna dzieląca (bez reszty) dwie (lub więcej) liczby całkowite

NWD(1675,3752) = ?

Algorytm Euklidesa - przykład

a	b	Dzielenie większej liczby przez mniejszą	Zamiana
1675	3752	b/a = 3752/1675 = 2 reszta 402	b = 402
1675	402	a/b = 1675/402 = 4 reszta 67	a = 67
67	402	b/a = 402/67 = 6 reszta 0	b = 0
67	0	KONIEC	

NWD(1675,3752) = 67

Algorytm Euklidesa - lista kroków

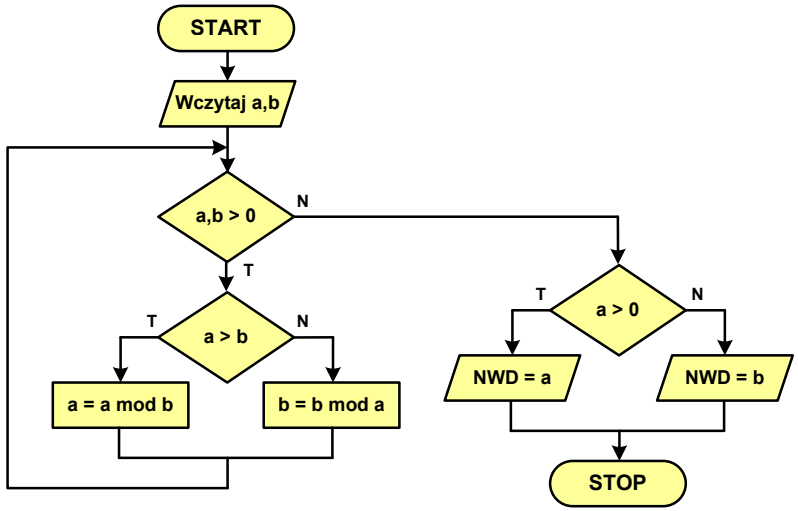
Dane wejściowe: niezerowe liczby naturalne a i b

Dane wyjściowe: NWD(a,b)

Kolejne kroki:

1. Czytaj liczby a i b
2. Dopóki a i b są większe od zera, powtarzaj krok 3, a w przeciwnym przypadku przejdź do kroku 4
3. Jeśli a jest większe od b, to weź za a resztę z dzielenia a przez b, w przeciwnym przypadku weź za b resztę z dzielenia b przez a
4. Przyjmij jako największy wspólny dzielnik tę z liczb a i b, która pozostała większa od zera
5. Drukuj NWD(a,b)

Algorytm Euklidesa - schemat blokowy



Algorytm Euklidesa - pseudokod

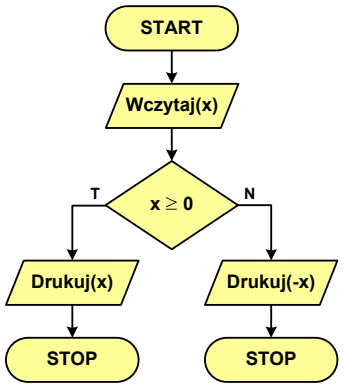
```
NWD(a,b)
while a>0 i b>0
 do if a>b
       then a ← a mod b
       else b ← b mod a
if a>0
   then return a
   else return b
```

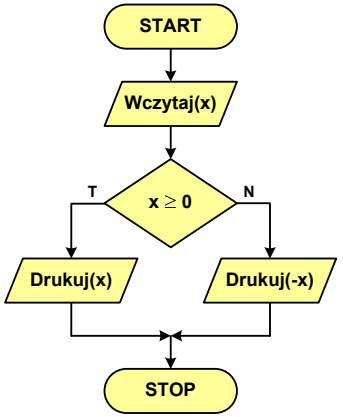
Algorytm Euklidesa - język programowania (C)

```
#include <stdio.h>

int main(void)
{
    int a = 1675, b = 3752, NWD;

    while (a>0 && b>0)
        if (a>b)
            a = a % b;
        else
            b = b % a;

    if (a>0)
        NWD = a;
    else
        NWD = b;

    printf("NWD = %d\n",NWD);
}
```


Wartość bezwzględna liczby - schemat blokowy

$$|x| = \begin{cases} x & dla \quad x \geq 0 \\ -x & dla \quad x < 0 \end{cases}$$





Równanie kwadratowe - schemat blokowy

$$ax^2 + bx + c = 0$$

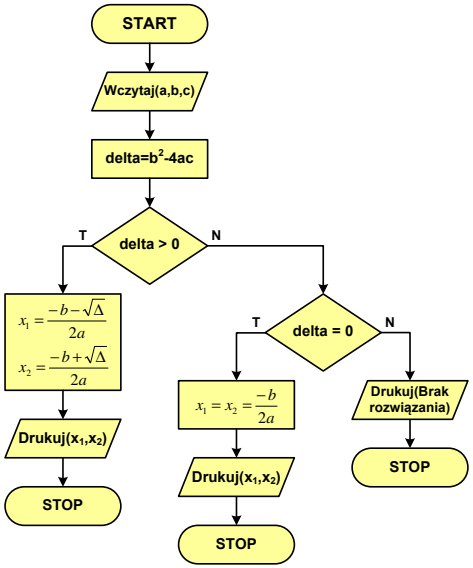
$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$\Delta > 0$:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$\Delta = 0$:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

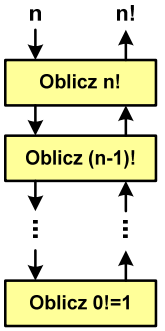


Rekurencja

- Rekurencja lub rekursja - jest to odwoływanie się funkcji lub definicji do samej siebie
- Rozwiązanie danego problemu wyraża się za pomocą rozwiązań tego samego problemu, ale dla danych o mniejszych rozmiarach
- W matematyce mechanizm rekurencji stosowany jest do definiowania lub opisywania algorytmów
- Silnia:

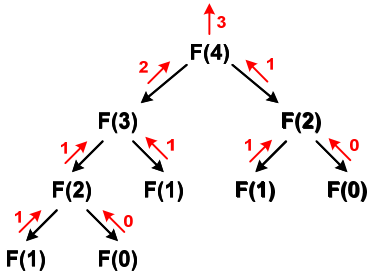
$$n! = \begin{cases} 1 & dla \quad n = 0 \\ n(n-1)! & dla \quad n \geq 1 \end{cases}$$

```
int silnia(int n)
{
    return n==0 ? 1 : n*silnia(n-1);
}
```



Rekurencja - ciąg Fibonacciego

$$F_n = \begin{cases} 0 & dla \quad n = 0 \\ 1 & dla \quad n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & dla \quad n > 1 \end{cases}$$




```
int F(int n)
{
    if (n==0) return 0;
    if (n==1) return 1;
    return F(n-1) + F(n-2);
}
```


Złożoność obliczeniowa

- W celu rozwiązania danego problemu obliczeniowego szukamy algorytmu najbardziej efektywnego czyli:
  - najszybszego (najkrótszy czas otrzymania wyniku)
  - o możliwie małym zapotrzebowaniu na pamięć
- Problem: Jak ocenić, który z dwóch różnych algorytmów rozwiązujących to samo zadanie jest efektywniejszy?
- Do oceny efektywności służy złożoność obliczeniowa algorytmu (koszt algorytmu) czyli ilość zasobów potrzebnych do jego działania (czas, pamięć)
- Miarą złożoności czasowej jest liczba podstawowych (dominujących) operacji (porównanie, podstawienie, operacja arytmetyczna) - pozostałe operacje są pomijane
- Miarą złożoności pamięciowej jest liczba wykorzystanych komórek pamięci (bajty lub liczba zmiennych określonego typu)

Złożoność obliczeniowa

- Złożoność obliczeniowa algorytmu jest funkcją opisującą zależność między liczbą danych a liczbą operacji wykonywanych przez ten algorytm
- W praktyce stosuje się oszacowanie powyższej funkcji - są to tzw. notacje (klasy złożoności):
  - O (duże O) - najbardziej popularna
  - Ω (omega)
  - Θ (theta)

Notacja O („duże O”)

- Wyraża złożoność matematyczną algorytmu
- Do wyznaczenia złożoności bierze się pod uwagę liczbę dominujących operacji wykonywanych w algorytmie
- Przykład zapisu: $O(n^2)$
  - po literze O występuje wyrażenie w nawiasach zawierające literę n, która oznacza liczbę elementów, na których działa algorytm
- W funkcji opisującej złożoność bierze się pod uwagę tylko najistotniejszy składnik, np.

  $f(n) = n^2+2n \rightarrow O(n^2)$ $\quad$ $f(n) = n^2+n-5 \rightarrow O(n^2)$

- W powyższych przykładach dla dużego n wpływ składnika liniowego i stałego na wartość funkcji jest nieistotny w porównaniu ze składnikiem głównym n^2

Notacja O („duże O”)

- Porównanie najczęściej występujących złożoności:

Elementy (n)	O(log n)	O(n)	O(n log n)	$O(n^2)$	$O(n^3)$	$O(2^n)$
10	3	10	33	100	1 000	1024
100	7	100	664	10 000	1 000 000	$1{,}27 \cdot 10^{30}$
1 000	10	1 000	9 966	1 000 000	10^9	$1{,}07 \cdot 10^{301}$
10 000	13	10 000	132 877	10^8	10^{12}	$1{,}99 \cdot 10^{3010}$

O(log n) - logarytmiczna (np. przeszukiwanie binarne)
O(n) - liniowa (np. porównywanie łańcuchów znaków)
O(n log n) - liniowo-logarytmiczna (np. sortowanie szybkie)
$O(n^2)$ - kwadratowa (np. proste algorytmy sortowania)
$O(n^3)$ - sześcienna (np. mnożenie macierzy)
$O(2^n)$ - wykładnicza (np. problem komiwojażera)

Sortowanie

- Sortowanie polega na uporządkowaniu zbioru danych względem pewnych cech charakterystycznych każdego elementu tego zbioru (wartości każdego elementu)
- W przypadku liczb, sortowanie polega na znalezieniu kolejności liczb zgodnej z relacją ≤ lub ≥

Przykład:

- Tablica nieposortowana:

6	4	5	2	3	1

- Tablica posortowana zgodnie z relacją ≤ (od najmniejszej do największej liczby):

1	2	3	4	5	6

- Tablica posortowana zgodnie z relacją ≥ (od największej do najmniejszej liczby):

6	5	4	3	2	1

Sortowanie

- W przypadku słów sortowanie polega na ustawieniu ich w porządku alfabetycznym (leksykograficznym)

Przykład:

- Tablica nieposortowana:

Paweł	Piotr	Adrian	Ela	Ola	Henryk

- Tablice posortowane:

Adrian	Ela	Henryk	Ola	Paweł	Piotr

Piotr	Paweł	Ola	Henryk	Ela	Adrian

Sortowanie

- W praktyce sortowanie sprowadza się do porządkowanie danych na podstawie porównania - porównywany element to klucz

Przykład:

- Tablica nieposortowana (imię, nazwisko, wiek):

Piotr	Ola	Paweł	Jan	Ela	Magda
Kowalski	Nowak	Wójcik	Kamiński	Król	Mazur
25	18	23	20	22	15

- Tablica posortowana (klucz - nazwisko):

Jan	Piotr	Ela	Magda	Ola	Paweł
Kamiński	Kowalski	Król	Mazur	Nowak	Wójcik
20	25	22	15	18	23

- Tablica posortowana (klucz - wiek):

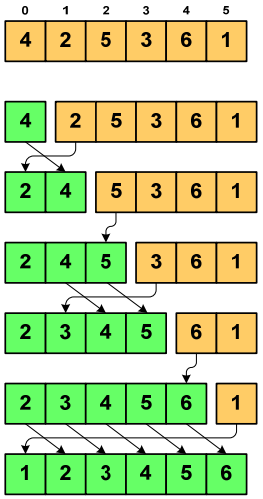
Magda	Ola	Jan	Ela	Paweł	Piotr
Mazur	Nowak	Kamiński	Król	Wójcik	Kowalski
15	18	20	22	23	25

Sortowanie

- Po co stosować sortowanie?
  - posortowane elementy można szybciej zlokalizować
  - posortowane elementy można przedstawić w czytelniejszy sposób
- Przykładowe algorytmy sortowania
  - proste wstawianie (insertion sort)
  - proste wybieranie (selection sort)
  - bąbelkowe (bubble sort)
  - szybkie (quick sort)
  - przez scalanie (merge sort)
  - kubełkowe / przez zliczanie (bucket sort)

Proste wstawianie (insertion sort)

Przykład:

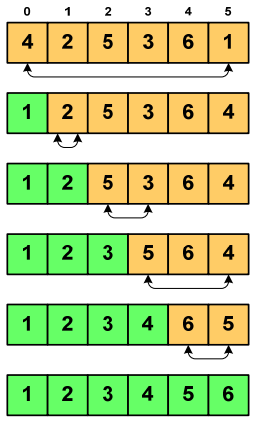


Program w języku C:

```
int main(void)
{
   int tab[N],i,j,tmp;
   // ...
   for (i=1; i<N; i++)
   {
      j=i;
      tmp=tab[i];
      while (tab[j-1]>tmp && j>0)
      {
         tab[j]=tab[j-1];
         j--;
      }
      tab[j]=tmp;
   }
}
```


Proste wybieranie (selection sort)

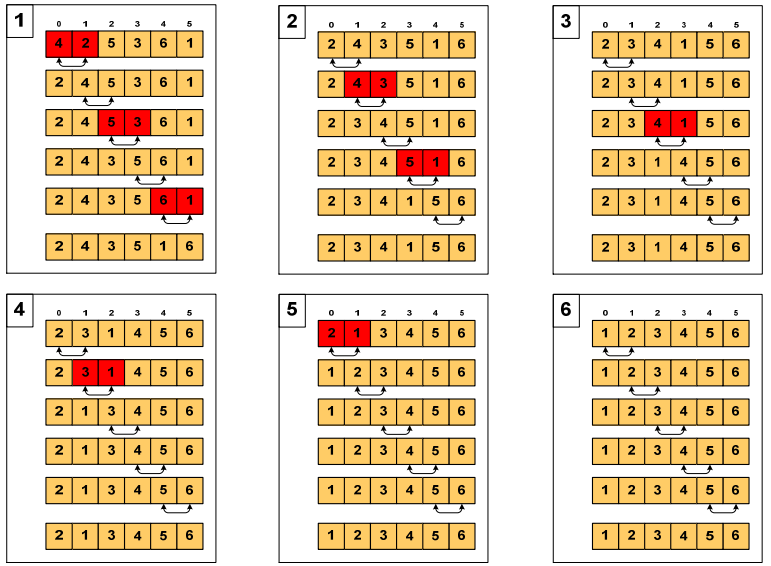
Przykład:



Program w języku C:

```
int main(void)
{
   int tab[N],i,j,k,tmp;
   // ...
   for (i=0;i<N-1;i++)
   {
      k=i;
      for (j=i+1; j<N; j++)
         if (tab[k]>=tab[j])
            k = j;
      tmp = tab[i];
      tab[i] = tab[k];
      tab[k] = tmp;
   }
}
```

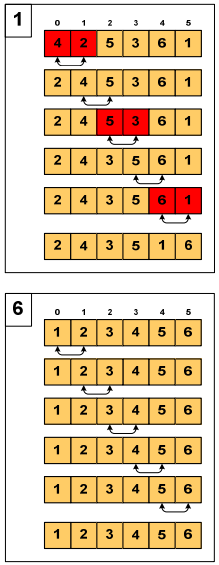

Bąbelkowe (bubble sort)



Bąbelkowe (bubble sort)

Program w języku C:

```
int main(void)
{
   int tab[N],i,j,tmp,koniec;
   // ...
   do {
      koniec=1;
      for (i=0;i<N-1;i++)
         if (tab[i]>tab[i+1])
         {
            tmp=tab[i];
            tab[i]=tab[i+1];
            tab[i+1]=tmp;
            koniec=0;
         }
   } while (!koniec);
}
```



Sortowanie szybkie (Quick-Sort) - faza dzielenia

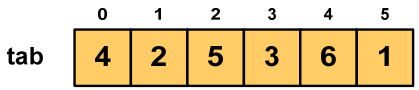
- Tablica jest dzielona na dwie części wokół pewnego elementu x (nazywanego elementem centralnym)
- Jako element centralny x najczęściej wybierany jest element środkowy (choć może to być także element losowy)
- Przeglądamy tablicę od lewej strony, aż znajdziemy element $a_i \geq x$, a następnie przeglądamy tablicę od prawej strony, aż znajdziemy element $a_j \leq x$
- Zamieniamy elementy a_i i a_j miejscami i kontynuujemy proces przeglądania i zamiany, aż nastąpi spotkanie w środku tablicy
- W ten sposób otrzymujemy tablicę podzieloną na lewą część z wartościami mniejszymi lub równymi x i na prawą część z wartościami większymi lub równymi x

Sortowanie szybkie (Quick-Sort) - faza sortowania

- Zawiera dwa rekurencyjne wywołania tej samej funkcji sortowania: dla lewej i dla prawej części posortowanej tablicy
- Rekurencja zatrzymuje się, gdy wielkość tablicy wynosi 1

Przykład:

- Sortujemy 6-elementową tablicę tab:

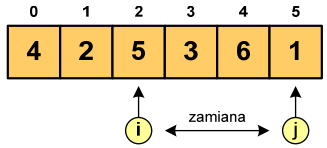


- Wywołanie funkcji QS() ma postać:

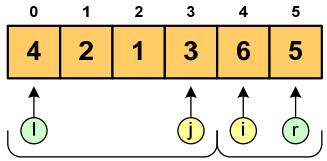
```
QS(tab,0,5);
```


Sortowanie szybkie (Quick-Sort) - QS(tab,0,5)

- Element środkowy: (0+5)/2 = 2, x = tab[2] = 5
- Od lewej szukamy tab[i] ≥ x, a od prawej szukamy tab[j] ≤ x, zamieniamy elementy miejscami



- Poszukiwania kończymy, gdy indeksy i, j mijają się

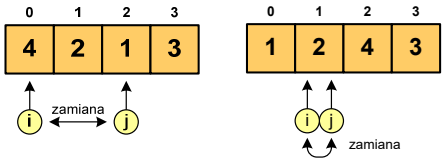


- Wywołujemy rekurencyjnie funkcję QS() dla elementów z zakresów [l,j] i [i,r]:

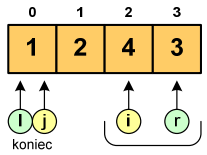
```
QS(tab,0,3);      QS(tab,4,5);
```

Sortowanie szybkie (Quick-Sort) - QS(tab,0,3)

- Element środkowy: (0+3)/2 = 1, x = tab[1] = 2
- Od lewej szukamy tab[i] ≥ x, a od prawej szukamy tab[j] ≤ x, zamieniamy elementy miejscami



- Poszukiwania kończymy, gdy indeksy i, j mijają się

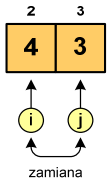


- Wywołanie QS() tylko dla elementów z zakresu [2,3], gdyż po lewej stronie rozmiar tablicy do posortowania wynosi 1:

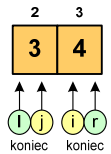
```
QS(tab,2,3);
```


Sortowanie szybkie (Quick-Sort) - QS(tab,2,3)

- Element środkowy: (2+3)/2 = 2, x = tab[2] = 4
- Od lewej szukamy tab[i] ≥ x, a od prawej szukamy tab[j] ≤ x, zamieniamy elementy miejscami



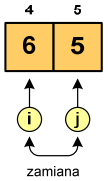
- Poszukiwania kończymy, gdy indeksy i, j mijają się



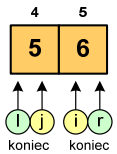
- Rozmiar obu tablic do posortowania wynosi 1 więc nie ma nowych wywołań funkcji QS()

Sortowanie szybkie (Quick-Sort) - QS(tab,4,5)

- Element środkowy: (4+5)/2 = 4, x = tab[4] = 6
- Od lewej szukamy tab[i] ≥ x, a od prawej szukamy tab[j] ≤ x, zamieniamy elementy miejscami



- Poszukiwania kończymy, gdy indeksy i, j mijają się



- Rozmiar obu tablic do posortowania wynosi 1 więc nie ma nowych wywołań funkcji QS()

Sortowanie szybkie (Quick-Sort) - funkcja w C

```
void QuickSort(int tab[], int l, int r)
{
   int i,j,x,y;

   i=l;
   j=r;
   x=tab[(l+r)/2];
   do
   {
      while (tab[i]<x) i++;
      while (x<tab[j]) j--;
      if (i<=j)
      {
         y=tab[i];
         tab[i]=tab[j];
         tab[j]=y;
         i++; j--;
      }
   } while (i<=j);
   if (l<j) QuickSort(tab,l,j);
   if (i<r) QuickSort(tab,i,r);
}
```

Funkcja qsort() w języku C

- Quick-Sort został zaimplementowany w języku C w funkcji:

QSORT stdlib.h

```
void qsort(void *baza, size_t n, size_t size,
      (*funkcja)(const void *element1, const void *element2));
```

- funkcja qsort() sortuje metodą Quick-Sort tablicę wskazywaną przez argument baza i zawierającą n elementów o rozmiarze size
- funkcja qsort() posługuje się funkcją porównującą funkcja(), której argumentami są wskazania do elementów tablicy baza
- funkcja() powinna zwracać wartości:
  - < 0, gdy *element1 < *element2
  - == 0, gdy *element1 == *element2
  - > 0, gdy *element1 > *element2

Funkcja qsort() w języku C - przykład (1/2)

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <time.h>
#define  N 10

void generuj(int tab[])
{
   int i;
   srand(time(NULL));
   for (i=0;i<N;i++)
      tab[i]=rand()%100;
}

void drukuj(int tab[])
{
   int i;
   for (i=0;i<N;i++)
      printf("%2d  ",tab[i]);
   printf("\n");
}
```


Funkcja qsort() w języku C - przykład (2/2)

```
int funkcja(const void *element1, const void *element2)
{
    if (*(int*)element1 < *(int*)element2) return -1;
    if (*(int*)element1 == *(int*)element2) return 0;
    if (*(int*)element1 > *(int*)element2) return 1;
}

int main()
{
   int tab[N];

   generuj(tab);
   drukuj(tab);

   printf("\nqsort:\n");
   qsort((void*)tab,(size_t)N,sizeof(int),funkcja);
   drukuj(tab);

   system("PAUSE");
   return (0);
}
```


Funkcja qsort() w języku C - przykład (2/2)

```
int funkcja(const
{
    if (*(int*)ele
    if (*(int*)ele
    if (*(int*)ele
}

int main()
{
   int tab[N];

   generuj(tab);
   drukuj(tab);

   printf("\nqsort:\n");
   qsort((void*)tab,(size_t)N,sizeof(int),funkcja);
   drukuj(tab);

   system("PAUSE");
   return (0);
}
```

```
 65  22  15  26  87  43   3  21  11  73

qsort:
  3  11  15  21  22  26  43  65  73  87
```

Koniec wykładu nr 4

Dziękuję za uwagę!