



Politechnika Białostocka
Wydział Elektryczny
Katedra Elektrotechniki Teoretycznej i Metrologii

Instrukcja
do pracowni specjalistycznej z przedmiotu

Technologie Informacyjne

MATLAB CZ. 2 MACIERZE - WYKORZYSTANIE OPERATORÓW MACIERZOWYCH I TABLICOWYCH

Numer ćwiczenia

TI11

Autor:
dr inż. Jarosław Forenc

Białystok 2016

Spis treści

1. Opis stanowiska	3
1.1. Stosowana aparatura	3
1.2. Oprogramowanie	3
2. Wstęp teoretyczny	3
2.1. Wprowadzanie macierzy	3
2.2. Odwołania do elementów macierzy	5
2.3. Macierze wielowymiarowe	8
2.4. Operacje na macierzach i wektorach	9
2.5. Funkcje przekształcające macierze i wyznaczające wielkości je charakteryzujące	12
2.6. Rozwiązywanie układów równań liniowych	16
2.7. Wielomiany	17
3. Przebieg ćwiczenia	20
4. Literatura	22
5. Zagadnienia na zaliczenie	23
6. Wymagania BHP	23

Materiały dydaktyczne przeznaczone dla studentów Wydziału Elektrycznego PB.

© Wydział Elektryczny, Politechnika Białostocka, 2016 (wersja 1.1)

Wszelkie prawa zastrzeżone. Żadna część tej publikacji nie może być kopiowana i odtwarzana w jakiegokolwiek formie i przy użyciu jakichkolwiek środków bez zgody posiadacza praw autorskich.

1. Opis stanowiska

1.1. Stosowana aparatura

Podczas zajęć wykorzystywany jest komputer klasy PC z systemem operacyjnym Microsoft Windows (XP/Vista/7).

1.2. Oprogramowanie

Na komputerach zainstalowane jest środowisko Matlab R2007b (Version 7.5.0.342), classroom license.

2. Wstęp teoretyczny

2.1. Wprowadzanie macierzy

Przy wprowadzaniu macierzy wszystkie jej elementy muszą być ujęte w nawiasy kwadratowe. Elementy oddziela się spacją lub przecinkiem. Średnik lub znak nowego wiersza **<Enter>** kończy wiersz macierzy i powoduje przejście do następnego. Liczba elementów w każdym wierszu musi być taka sama.

Wprowadzenie macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

będzie miało następującą postać:

```
>> A = [3 7 6; 4 2 1]
```

Można wprowadzać także wektory wierszowe i kolumnowe:

```
B = [1 2 3 4]                      >> B = [1 2 3 4]
```

```
C =  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$                       >> C = [1; 2; 3; 4]
```

Macierze mogą zawierać liczby zespolone. Wprowadzenie macierzy:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2+3i & 4-6i \\ -2-5i & 3i \end{bmatrix}$$

Będzie miało postać:

```
>> D = [2+3i 4-6i; -2-5i 3i]
```

lub

```
>> D = [2 4; -2 0] + i*[3 -6; -5 3]
```

Jeśli kolejne elementy macierzy różnią się od siebie o określoną wartość to do utworzenia macierzy można wykorzystać dwukropek (:).

min:max - generuje wektor wierszowy zawierający liczby całkowite z przedziału <min,max> zwiększające się o 1,

min:krok:max - generuje wektor wierszowy zawierający liczby od min do max o wartościach zmieniających się o krok,

```
>> A = 1:4
```

```
A =  
 1 2 3 4
```

```
>> B = 5:3:15
```

```
B =  
 5 8 11 14
```

```
>> C = [1:4; 1:0.5:2.5]
```

```
C =  
 1.0000 2.0000 3.0000 4.0000  
 1.0000 1.5000 2.0000 2.5000
```

W Matlabie zdefiniowano szereg funkcji do generowania macierzy specjalnych.

eye (n)	generuje macierz jednostkową o rozmiarze $n \times n$ (jedynki na głównej przekątnej, reszta elementów równa zero)
ones (n)	generuje macierz o rozmiarze $n \times n$ o wszystkich elementach równych 1
zeros (n)	generuje macierz o rozmiarze $n \times n$ o wszystkich elementach równych 0
rand (n)	generuje macierz o rozmiarze $n \times n$ wypełnioną liczbami pseudolosowymi z przedziału <0,1>

randn (n)	generuje macierz o rozmiarze $n \times n$ wypełnioną liczbami pseudolosowymi o rozkładzie normalnym ze średnią równą 0 i wariancją równą 1
------------------	--

```
>> eye(4)
```

```
ans =
```

```

1    0    0    0
0    1    0    0
0    0    1    0
0    0    0    1
```

```
>> rand(3)
```

```
ans =
```

```

0.4218    0.9595    0.8491
0.9157    0.6557    0.9340
0.7922    0.0357    0.6787
```

Powyższe funkcje generują macierze kwadratowe ($n \times n$), dla macierzy prostokątnych należy podać dwa argumenty, np.

```
>> ones(n, m)      n - liczba wierszy, m - liczba kolumn
```

2.2. Odwołania do elementów macierzy

Do elementu macierzy **A** znajdującego się w wierszu o indeksie **i** oraz kolumnie o indeksie **j** odwołujemy się poprzez **A(i,j)**. Elementem takim można posługiwać się jak każdą inną zmienną. Indeksy wierszy i kolumn rozpoczynają się od wartości 1.

```
>> A = [3 7 6; 4 2 1]
```

```
A =
```

```

3    7    6
4    2    1
```

```
>> A(1,1)
```

```
ans =
```

```
3
```

	1	2	3
1	3	7	6
2	4	2	1

```
>> A(2,3)
ans =
     1
```

	1	2	3
1	3	7	6
2	4	2	1

Do elementów macierzy można odwoływać się także przy użyciu jednego indeksu:

- jeśli **A** jest wektorem, to odwołanie **A(i)** oznacza odwołanie do i-tego elementu wektora,
- jeśli **A** jest macierzą dwuwymiarową, to odwołanie **A(i)** oznacza odwołanie do wektora kolumnowego uformowanego z kolejnych kolumn oryginalnej macierzy, umieszczonych jedna pod druga, np.

```
>> A = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9];
```

```
>> A(2,3)
ans =
     6
```

	1	2	3
1	1	2	3
2	4	5	6
3	7	8	9

```
>> A(6)
ans =
     8
```

1	1
2	4
3	7
4	2
5	5
6	8
7	3
8	6
9	9

Wykorzystując dwukropek można odwoływać się do wybranych fragmentów macierzy.

A(i, :)	i-ty wiersz macierzy A
A(:, j)	j-ta kolumna macierzy A
A(:)	cała macierz w postaci wektora kolumnowego
A(:, :)	cała macierz (dwuwymiarowa)
A(i, j:k)	elementy i-tego wiersza macierzy A o numerach od j do k

$A(i:j, k:l)$	elementy od i -tego do j -tego wiersza oraz od k -tej do l -tej kolumny
$A(X, i:j)$	wszystkie elementy w kolumnach od i do j i wierszach macierzy A o numerach określonych przez elementy wektora X

```
>> A = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9];
```

```
>> A(2, :)
```

```
ans =
```

```
4 5 6
```

	1	2	3
1	1	2	3
2	4	5	6
3	7	8	9

```
>> A(2, 1:2)
```

```
ans =
```

```
4 5
```

	1	2	3
1	1	2	3
2	4	5	6
3	7	8	9

```
>> A(2:3, 2:3)
```

```
ans =
```

```
5 6
8 9
```

	1	2	3
1	1	2	3
2	4	5	6
3	7	8	9

```
>> A(:, [1 3])
```

```
ans =
```

```
1 3
4 6
7 9
```

	1	2	3
1	1	2	3
2	4	5	6
3	7	8	9

```
>> A([1 3], [1 3])
```

```
ans =
```

```
1 3
7 9
```

	1	2	3
1	1	2	3
2	4	5	6
3	7	8	9

```
>> A(:)
ans =
     1
     4
     7
     2
     5
     8
     3
     6
     9
```

1	1
2	4
3	7
4	2
5	5
6	8
7	3
8	6
9	9

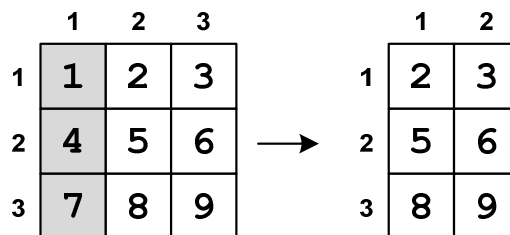
Można usunąć wybrane elementy macierzy przypisując im wartość w postaci macierzy pustej symbolizowanej przez puste nawiasy kwadratowe.

```
>> A = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9];
```

```
>> A(:,1) = []
```

```
A =
```

```
     2     3
     5     6
     8     9
```



2.3. Macierze wielowymiarowe

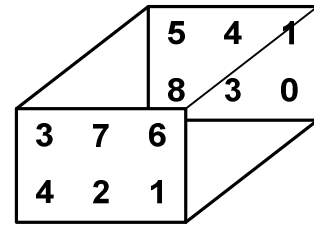
Matlab umożliwia definiowanie i wykonywanie operacji na macierzach wielowymiarowych. Odwołania do elementów takich macierzy wymagają podania odpowiedniej liczby indeksów, przy czym przyjmuje się, że:

- pierwszy indeks oznacza numer **wiersza** (wymiar 1),
- drugi indeks oznacza numer **kolumny** (wymiar 2),
- trzeci indeks oznacza numer **strony** (wymiar 3),
- kolejne indeksy oznaczają kolejne wymiary.

W przypadku macierzy trójwymiarowych definiuje się je stronami, np.

```
>> A(:, :, 1) = [3 7 6; 4 2 1] (strona 1)
```

```
>> A(:, :, 2) = [5 4 1; 8 3 0] (strona 2)
```



Przykładowe odwołania do powyższej macierzy:

```
>> A(2, 2, 1)
```

```
ans =  
      2
```

```
>> A(2, 2, 2)
```

```
ans =  
      3
```

Macierze wielowymiarowe mogą być także tworzone za pomocą odpowiednich funkcji (`eye()`, `ones()`, `zeros()`, `rand()`, `randn()`), np.

```
>> A = rand(2, 3, 2)
```

```
A(:, :, 1) =
```

```
    0.9501    0.6068    0.8913  
    0.2311    0.4860    0.7621
```

```
A(:, :, 2) =
```

```
    0.4565    0.8214    0.6154  
    0.0185    0.4447    0.7919
```

2.4. Operacje na macierzach i wektorach

Operacje wykonywane na macierzach i wektorach można podzielić na:

- **operacje macierzowe** - określone regułami algebry liniowej,
- **operacje tablicowe** - wykonywane element po elemencie, operatory w tych operacjach poprzedzone są kropką.

Podstawowe operacje i stosowane operatory zostały zestawione w poniższej tabeli.

Operacja	macierzowa	tablicowa	uwagi
dodawanie	+	+	
odejmowanie	-	-	
mnożenie	*	.*	

Operacja	macierzowa	tablicowa	uwagi
potęgowanie	^	.^	
dzielenie prawostronne	/	./	$\mathbf{A} ./ \mathbf{B} \quad \mathbf{A}(i, j) / \mathbf{B}(i, j)$
dzielenie lewostronne	\	.\	$\mathbf{A} .\backslash \mathbf{B} \quad \mathbf{B}(i, j) / \mathbf{A}(i, j)$
transpozycja	'	.'	

Poniżej przedstawiono sposób w jaki wykonywane są operacje macierzowe i tablicowe. Załóżmy, że mamy dwie macierze \mathbf{A} i \mathbf{B} .

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

W przypadku dodawania i odejmowania operacje macierzowe i tablicowe wykonywane są w ten sam sposób.

Dodawanie (macierzowe, tablicowe)

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

Odejmowanie (macierzowe, tablicowe)

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} \end{bmatrix}$$

Mnożenie (tablicowe)

$$\mathbf{A} .* \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} & a_{12} \cdot b_{12} \\ a_{21} \cdot b_{21} & a_{22} \cdot b_{22} \end{bmatrix}$$

Mnożenie (macierzowe)

$$\mathbf{A} * \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{bmatrix}$$

Mnożenie tablicowe jest przemienne: $\mathbf{A} .* \mathbf{B} = \mathbf{B} .* \mathbf{A}$. Mnożenie macierzowe nie jest przemienne: $\mathbf{A} * \mathbf{B} \neq \mathbf{B} * \mathbf{A}$. W przypadku mnożenia macierzowego liczba wierszy macierzy \mathbf{A} musi być równa liczbie kolumn macierzy \mathbf{B} .

Potęgowanie (tablicowe)

$$\mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} a_{11}^k & a_{12}^k \\ a_{21}^k & a_{22}^k \end{bmatrix}$$

Potęgowanie (macierzowe)

$$\mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A} * \mathbf{A} * \mathbf{A} * \dots * \mathbf{A}}_k$$

Dzielenie prawostronne (tablicowe)

$$\mathbf{A} / \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} / b_{11} & a_{12} / b_{12} \\ a_{21} / b_{21} & a_{22} / b_{22} \end{bmatrix}$$

Dzielenie lewostronne (tablicowe)

$$\mathbf{A} \setminus \mathbf{B} = \mathbf{B} / \mathbf{A} = \begin{bmatrix} b_{11} / a_{11} & b_{12} / a_{12} \\ b_{21} / a_{21} & b_{22} / a_{22} \end{bmatrix}$$

Dzielenie prawostronne (macierzowe)

$$\mathbf{A} / \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^{-1}$$

Dzielenie lewostronne (macierzowe)

$$\mathbf{A} \setminus \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$$

Transpozycja macierzy zawierającej tylko elementy rzeczywiste daje takie same wyniki przy zastosowaniu obu operatorów - tablicowego i macierzowego. Jeśli macierz zawiera elementy zespolone to zastosowanie operatora tablicowego powoduje tylko zamianę wierszy macierzy z jej kolumnami, natomiast w przypadku operatora macierzowego otrzymana macierz zawiera elementy sprzężone z odpowiednimi elementami macierzy zespolonej.

```
>> A = [1+1i 2-2i; 3-3i 4+4i]
A =
    1.0000+ 1.0000i    2.0000- 2.0000i
    3.0000- 3.0000i    4.0000+ 4.0000i

>> A.'
ans =
    1.0000+ 1.0000i    3.0000- 3.0000i
    2.0000- 2.0000i    4.0000+ 4.0000i
```

```

>> A'
ans =
    1.0000- 1.0000i    3.0000+ 3.0000i
    2.0000+ 2.0000i    4.0000- 4.0000i

```

Jeśli jeden z argumentów przy operacjach jest skalarą, to zawsze wykonywane są operacje tablicowe, np.

>> **A+1** - do każdego elementu macierzy **A** zostanie dodana wartość 1.

>> **A/5** - każdy element macierzy **A** zostanie podzielony przez 5.

2.5. Funkcje przekształcające macierze i wyznaczające wielkości je charakteryzujące

Funkcje wyświetlające rozmiary macierzy:

size(A)	funkcja wyświetlająca liczbę wierszy i liczbę kolumn macierzy A w postaci dwuelementowego wektora wierszowego
n = size(A,1)	funkcja przypisująca zmiennej n liczbę wierszy macierzy A
m = size(A,2)	funkcja przypisująca zmiennej m liczbę kolumn macierzy A
length(x)	funkcja zwracająca długość wektora x lub dłuższy z wymiarów macierzy (jeśli x jest macierzą)

Funkcje wyświetlające wartości charakteryzujące macierze:

rank(A)	funkcja obliczająca rząd macierzy A (liczbę liniowo niezależnych wektorów tworzących wiersze lub kolumny macierzy)
det(A)	funkcja obliczająca wyznacznik macierzy kwadratowej A
cond(A)	funkcja obliczająca współczynnik uwarunkowania macierzy A , definiowany jako $\text{cond}(\mathbf{A}) = \ \mathbf{A}\ \cdot \ \mathbf{A}^{-1}\ $, stanowiący współczynnik z jakim błędy wejściowe przenoszą się na wyjście podczas operacji macierzowej; im większa jest wartość współczynnika uwarunkowania macierzy tym większa jest jej wrażliwość na błędy zaokrągleń podczas wykonywania operacji arytmetycznych

<code>trace(A)</code>	funkcja obliczająca ślad macierzy A (sumę elementów na przekątnej)
<code>E = eig(A)</code>	funkcja zwracająca wektor E zawierający wartości własne macierzy kwadratowej A
<code>[V,D] = eig(A)</code>	funkcja zwracająca: - macierz diagonalną D zawierającą na diagonalu wartości własne macierzy kwadratowej A - macierz V , której kolumny są wektorami własnymi odpowiadającymi kolejnym wartościom własnym

```
>> A = [8 5 6; 3 4 7; 4 7 2];
```

```
>> eig(A)
```

```
ans =
```

```
15.2888
```

```
2.9210
```

```
-4.2097
```

```
>> [V,D] = eig(A)
```

```
V =
```

```
0.7293    0.8192   -0.1300
```

```
0.4900   -0.5041   -0.6154
```

```
0.4776   -0.2734    0.7774
```

```
D =
```

```
15.2888         0         0
```

```
0    2.9210         0
```

```
0         0   -4.2097
```

Funkcje przekształcające macierze:

<code>inv(A)</code>	funkcja obliczająca macierz odwrotną do macierzy A , taki sam wynik uzyskamy podnosząc macierz A do potęgi -1: $\text{inv}(A) = A^{-1}$
---------------------	--

```
>> A = [8 5 6; 3 4 7; 4 7 2];
```

```
>> inv(A)
```

```
ans =
```

```
0.2181   -0.1702   -0.0585
```

```
-0.1170    0.0426    0.2021
```

```
-0.0266    0.1915   -0.0904
```

```
>> A = [7 6 4; 4 9 1; 6 7 3];
```

```
>> inv(A)
```

```
Warning: Matrix is close to singular or badly  
scaled. Results may be inaccurate.  
RCOND = 6.308085e-018.
```

```
ans =  
1.0e+015 *  
1.8476    0.9238   -2.7714  
-0.5543   -0.2771    0.8314  
-2.4019   -1.2010    3.6029
```

W powyższym przykładzie próbujemy obliczyć macierz odwrotną do macierzy osobiwej. Matlab ostrzega nas komunikatem: „Macierz jest prawie macierzą osobiwą lub jest źle wyskalowana. Wynik może być niepoprawny.” RCOND (reciprocal condition estimate) jest odwrotnością wskaźnika uwarunkowania macierzy.

<code>x = diag(A)</code>	funkcja tworząca wektor x z elementów znajdujących się na głównej przekątnej macierzy A
<code>A = diag(x)</code>	funkcja tworząca macierz przekątniową A z elementami wektora x na głównej przekątnej

```
>> x = [1:5]
```

```
x =  
1    2    3    4    5
```

```
>> A = diag(x)
```

```
A =  
1    0    0    0    0  
0    2    0    0    0  
0    0    3    0    0  
0    0    0    4    0  
0    0    0    0    5
```

<code>repmat(A, n, m)</code>	funkcja tworząca nową macierz przez powielenie podmacierzy A m -razy w poziomie i n -razy w pionie
------------------------------	---

```
>> A = [1 2; 3 4];
```

```
>> repmat(A, 2, 3)
```

```
ans =
```

```
    1    2    1    2    1    2
    3    4    3    4    3    4
    1    2    1    2    1    2
    3    4    3    4    3    4
```

reshape(A, n, m)	funkcja tworząca macierz o n -wierszach i m -kolumnach z macierzy A (elementy nowej macierzy powstają z elementów macierzy A branych kolejno kolumnami), nowa macierz i macierz A powinny mieć tyle samo elementów
-------------------------	---

```
>> A = [1 5 9; 2 6 10; 3 7 11; 4 8 12]
```

```
A =
```

```
    1    5    9
    2    6   10
    3    7   11
    4    8   12
```

```
>> reshape(A, 3, 4)
```

```
ans =
```

```
    1    4    7   10
    2    5    8   11
    3    6    9   12
```

W Matlabie istnieje szereg funkcji wykonujących operacje na wektorach.

max(x)	funkcja zwracająca największy element wektora x
min(x)	funkcja zwracająca najmniejszy element wektora x
sum(x)	funkcja zwracająca sumę elementów wektora x
prod(x)	funkcja zwracająca iloczyn elementów wektora x
mean(x)	funkcja zwracająca średnią arytmetyczną elementów wektora x
norm	funkcja obliczająca normę wektora lub macierzy
dot(A, B)	funkcja obliczająca iloczyn skalarny wektorów A i B , wektory A i B powinny mieć taką samą długość
sort(V)	funkcja sortująca elementy wektora V w kolejności rosnącej

<code>diff(V)</code>	funkcja obliczająca różnice pomiędzy sąsiednimi elementami wektora V
<code>cumsum(V)</code>	funkcja obliczająca sumy skumulowane kolejnych elementów wektora V
<code>cumprod(V)</code>	funkcja obliczająca iloczyny skumulowane kolejnych elementów wektora V

Jeśli w powyższych funkcjach **x** jest macierzą dwuwymiarową, to funkcje te zwracają wyniki odnoszące się do poszczególnych jej **kolumn**.

```
>> V = [2 4 1 6 5];
>> mean(V)
ans =
    3.6000

>> sort(V)
ans =
     1     2     4     5     6

>> diff(V)
ans =
     2    -3     5    -1

>> cumsum(V)
ans =
     2     6     7    13    18

>> cumprod(V)
ans =
     2     8     8    48   240
```

2.6. Rozwiązywanie układów równań liniowych

Rozwiązywanie układów równań liniowych w postaci $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ (gdzie **A** - macierz współczynników, **x** - wektor niewiadomych, **b** - wektor wyrazów wolnych) jest jednym z podstawowych zagadnień algebry liniowej. Najprostsza metoda rozwiązania takiego układu polega na zastosowaniu macierzy odwrotnej lub dzielenia lewostronnego.

$\mathbf{x} = \text{inv}(\mathbf{A}) * \mathbf{b}$	rozwiązuje układ $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ (\mathbf{b} musi być wektorem kolumnowym)
$\mathbf{x} = \mathbf{A} \backslash \mathbf{b}$	rozwiązuje układ $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ (\mathbf{b} musi być wektorem kolumnowym)

Rozwiążmy układ równań:

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

```
>> A = [5 4 2; 1 2 0; 3 0 4];
```

```
>> b = [13; 5; 7];
```

```
>> x = inv(A) * b
```

```
>> x = A \ b
```

```
x =
```

```
 -0.3333
```

```
  2.6667
```

```
  2.0000
```

```
x =
```

```
 -0.3333
```

```
  2.6667
```

```
  2.0000
```

2.7. Wielomiany

W Matlabie wielomiany reprezentowane są w postaci wektora wierszowego zawierającego współczynniki wielomianu. Współczynniki są umieszczone w kolejności malejących potęg (od współczynnika stojącego przy najwyższej potędze do współczynnika stojącego przy najniższej).

$\mathbf{Y} = \text{polyval}(\mathbf{P}, \mathbf{X})$	funkcja obliczająca wartość wielomianu \mathbf{P} dla \mathbf{X} ; \mathbf{P} jest wektorem, którego elementami są współczynniki wielomianu umieszczone w kolejności malejących potęg
---	---

Obliczamy wartość wielomianu $P(x)$ dla $x = 3$:

$$P(x) = 15x^4 - 6x^3 + 4x - 3$$

```
>> P = [15 -6 0 4 -3];
```

```
>> y = polyval(P, 3)
```

```
y =
```

```
 1062
```

Jeśli argument **X** funkcji **polyval** jest macierzą lub wektorem, to wartość wielomianu jest obliczana oddzielnie dla każdego elementu tej macierzy lub wektora.

roots (P)	funkcja obliczająca pierwiastki wielomianu P
------------------	---

Szukamy pierwiastków wielomianu **P(x)**:

$$P(x) = 15x^4 - 6x^3 + 4x - 3$$

```
>> P = [15 -6 0 4 -3];  
>> roots(P)  
ans =  
-0.7055  
0.2550 + 0.6412i  
0.2550 - 0.6412i  
0.5954
```

poly (V)	funkcja obliczająca współczynniki wielomianu na podstawie jego pierwiastków zawartych w wektorze V
-----------------	---

```
>> V = [3 7 2 -3 4];  
>> poly(V)  
ans =  
1 -13 41 61 -450 504
```

Wielomian z powyższego przykładu ma postać:

$$P(x) = x^5 - 13x^4 + 41x^3 + 61x^2 - 450x + 504$$

Funkcja **poly** jest funkcją odwrotną do **roots**, a **roots** - funkcją odwrotną do **poly**:

```
>> P = [1 -13 41 61 -450 504];  
>> roots(P)  
ans =  
7.0000  
-3.0000  
4.0000  
3.0000  
2.0000
```

Jeśli argument funkcji **poly** jest macierzą kwadratową, to zwraca ona wektor zawierający współczynniki wielomianu charakterystycznego tej macierzy.

polyder (P)	funkcja wykonująca różniczkowanie wielomianu o współczynnikach przekazanych w wektorze P
--------------------	---

Pochodna wielomianu:

$$P(x) = 15x^4 - 6x^3 + 4x - 3$$

wynosi:

$$P'(x) = 60x^3 - 18x^2 + 4$$

```
>> P = [15 -6 0 4 -3];  
>> polyder (P)  
ans =  
      60      -18         0         4
```

Operacją odwrotną do różniczkowania wielomianu jest jego całkowanie wykonywane przez funkcję **polyint()**.

polyint (P, C)	funkcja wykonująca całkowanie wielomianu o współczynnikach przekazanych w wektorze P i stałej całkowania C
-----------------------	--

Całka wielomianu:

$$P(x) = 60x^3 - 18x^2 + 4$$

dla **C = -3** wynosi:

$$\int P(x) dx = 15x^4 + 6x^3 + 4x - 3$$

```
>> P = [60 18 0 4];  
>> polyint (P, -3)  
ans =  
      15         6         0         4      -3
```

3. Przebieg ćwiczenia

Wykonaj podane poniżej zadania.

1. Wykorzystując dwukropek (:) lub odpowiednie funkcje wygeneruj macierze:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\text{b) } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 \\ 0,5 & 1,5 & 2,5 & 3,5 & 4,5 & 5,5 & 6,5 \end{bmatrix},$$

$$\text{c) } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{-\pi}{2} & \frac{-\pi}{4} & 0 & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{2} \\ -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

d) macierz \mathbf{D} o rozmiarze 4×3 wypełnioną liczbami pseudolosowymi z przedziału $\langle 0,1 \rangle$,

e) macierz jednostkową \mathbf{E} o rozmiarze 4×4 .

2. Na podstawie macierzy \mathbf{A} z Zadania 1 utwórz:

a) wektor $\mathbf{A1}$ zawierający drugi wiersz macierzy \mathbf{A} ,

b) macierz $\mathbf{A2}$ zawierającą kolumny od 3 do 7 macierzy \mathbf{A} ,

c) macierz $\mathbf{A3}$ zawierającą kolumny od 3 do 5 macierzy \mathbf{A} z wierszy nr 2 i 3,

d) macierz $\mathbf{A4}$ zawierającą kolumny nr 1, 3, 5, 7, 9 z macierzy \mathbf{A} .

3. Dane są macierze \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} i \mathbf{D} . Rozwiąż poniższe równanie macierzowe.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}(\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{B}) = \mathbf{D}$$

4. Oblicz wartości poniższej funkcji dla elementów wektora \mathbf{x} .

$$y = 2x \cos(1 + x^2) \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\pi & \pi & \frac{3}{2}\pi & 2\pi \end{bmatrix}$$

5. Dane są dwie macierze:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 8 & 1 & 8 \\ 5 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Stosując odpowiednie funkcje oblicz:

- a) rzędy macierzy **A** i **B**,
 - b) wyznaczniki macierzy **A** i **B**,
 - c) wskaźniki uwarunkowań macierzy **A** i **B**,
 - d) wartości własne macierzy **A** i **B**,
 - e) ślady macierzy **A** i **B**,
 - f) macierze odwrotne macierzy **A** i **B**,
 - g) wartość najmniejszego elementu macierzy **A**,
 - h) sumę wszystkich elementów macierzy **A**,
 - i) sumę elementów na głównej przekątnej macierzy **A**.
6. Rozwiąż poniższy układ równań stosując:

- a) macierz odwrotną,
- b) dzielenie lewostronne.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_2 + 2x_3 = -3 \\ 6x_1 + x_2 + x_3 = 7,5 \end{cases}$$

Sprawdź, czy obie metody dały identyczne wyniki (odejmij otrzymane wyniki od siebie).

7. Oblicz pierwiastki oraz wartość wielomianu **f(x)** dla **x = 2**:

$$f(x) = 2x^6 - 3x^5 + 1,5x^3 - 4x^2 - 2$$

8. Pierwiastki pewnego wielomianu $f(x)$ wynoszą:

$$x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2, x_4 = -2, x_5 = 3, x_6 = -3$$

Oblicz i podaj postać tego wielomianu.

9. Stosując funkcję **roots** oblicz pierwiastki wielomianu $f(x)$. Oceń dokładność wyznaczenia tych pierwiastków.

$$f(x) = (x - 1)^6$$

4. Literatura

- [1] Mrozek B., Mrozek Z.: MATLAB i Simulink. Poradnik użytkownika. Wydanie III. Helion, Gliwice, 2012.
- [2] Stachurski M. Treichel W.: Matlab dla studentów. Ćwiczenia, zadania, rozwiązania. Witkom, Warszawa, 2009.
- [3] Pratap R.: MATLAB dla naukowców i inżynierów. Wydanie 2. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2015.
- [4] Brzóska J., Dorobczyński L.: Matlab: środowisko obliczeń naukowo-technicznych. „Mikom”, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2008.
- [5] Kamińska A., Pańczyk B.: Ćwiczenia z Matlab. Przykłady i zadania. Wydawnictwo MIKOM, Warszawa, 2002.
- [6] Sobierajski M., Łabuzek M.: Programowanie w Matlabie dla elektryków. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 2005.
- [7] Dyka E., Markiewicz P., Sikora R.: Modelowanie w elektrotechnice z wykorzystaniem środowiska MATLAB. Wydawnictwa Politechniki Łódzkiej, Łódź, 2006.
- [8] Sradomski W.: Matlab. Praktyczny podręcznik modelowania. Helion, Gliwice, 2015.
- [9] Czajka M.: MATLAB. Ćwiczenia. Helion, Gliwice, 2005.

5. Zagadnienia na zaliczenie

1. W jaki sposób w Matlabie wprowadza się macierze dwu- i wielowymiarowe?
2. Do czego w operacjach na macierzach może być wykorzystany dwukropek?
3. Wyjaśnij czym różnią się operacje macierzowe i tablicowe?
4. W jaki sposób w Matlabie reprezentowane są wielomiany?

6. Wymagania BHP

Warunkiem przystąpienia do praktycznej realizacji ćwiczenia jest zapoznanie się z instrukcją BHP i instrukcją przeciw pożarową oraz przestrzeganie zasad w nich zawartych.

W trakcie zajęć laboratoryjnych należy przestrzegać następujących zasad.

- Sprawdzić, czy urządzenia dostępne na stanowisku laboratoryjnym są w stanie kompletnym, nie wskazującym na fizyczne uszkodzenie.
- Jeżeli istnieje taka możliwość, należy dostosować warunki stanowiska do własnych potrzeb, ze względu na ergonomię. Monitor komputera ustawić w sposób zapewniający stałą i wygodną obserwację dla wszystkich członków zespołu.
- Sprawdzić prawidłowość połączeń urządzeń.
- Załączenie komputera może nastąpić po wyrażeniu zgody przez prowadzącego.
- W trakcie pracy z komputerem zabronione jest spożywanie posiłków i picie napojów.
- W przypadku zakończenia pracy należy zakończyć sesję przez wydanie polecenia wylogowania. Zamknięcie systemu operacyjnego może się odbywać tylko na wyraźne polecenie prowadzącego.
- Zabronione jest dokonywanie jakichkolwiek przełączeń oraz wymiana elementów składowych stanowiska.

- Zabroniona jest zmiana konfiguracji komputera, w tym systemu operacyjnego i programów użytkowych, która nie wynika z programu zajęć i nie jest wykonywana w porozumieniu z prowadzącym zajęcia.
- W przypadku zaniku napięcia zasilającego należy niezwłocznie wyłączyć wszystkie urządzenia.
- Stwierdzone wszelkie braki w wyposażeniu stanowiska oraz nieprawidłowości w funkcjonowaniu sprzętu należy przekazywać prowadzącemu zajęcia.
- Zabrania się samodzielnego włączania, manipulowania i korzystania z urządzeń nie należących do danego ćwiczenia.
- W przypadku wystąpienia porażenia prądem elektrycznym należy niezwłocznie wyłączyć zasilanie stanowiska. Przed odłączeniem napięcia nie dotykać porażonego.